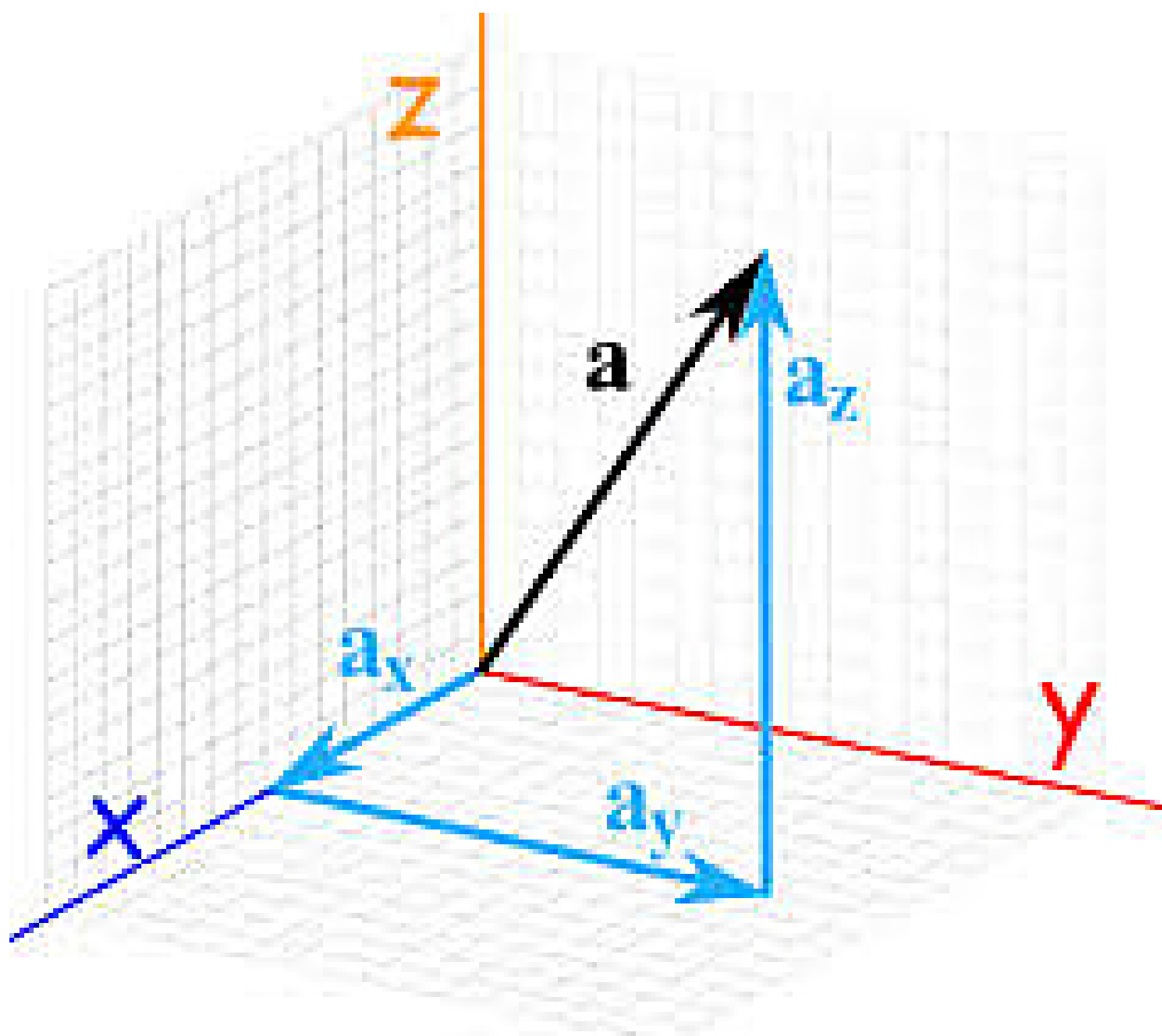




Math Academy



Μαθηματικά Β' Λυκείου

Προσανατολισμού
Θετικών Σπουδών

Μαρίνος Παπαδόπουλος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ενότητα 1

Η έννοια του διανύσματος
Πράξεις διανυσμάτων

Ενότητα 2

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα
1^η Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

Ενότητα 3

Συντεταγμένες στο επίπεδο
Μέτρο διανύσματος
2^η Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων
Συντελεστής διεύθυνσης διανυσμάτων

Ενότητα 4

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων
Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα

Ενότητα 5

Ερωτήσεις επανάληψης
Ασκήσεις επανάληψης

Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Ενότητα 6

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας – Καθετότητα –
Παραλληλία ευθειών
Εξίσωση ευθείας

Ενότητα 7

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας
Διάνυσμα παράλληλο – κάθετο σε ευθεία

Ενότητα 8

Απόσταση σημείου από ευθεία
Εμβαδόν τριγώνου

Ενότητα 9

Ερωτήσεις επανάληψης
Ασκήσεις επανάληψης

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ**Ενότητα 10**

Εξισώσεις κύκλου
Εφαπτομένη κύκλου

Ενότητα 11

Εξισώσεις παραβολής
Εφαπτομένη παραβολής

Ενότητα 12

Εξίσωση έλλειψης
Εφαπτομένη έλλειψης

Ενότητα 13

Εξίσωση υπερβολής
Ασύμπτωτες υπερβολής
Εφαπτομένη υπερβολής

Ενότητα 14

Ερωτήσεις Επανάληψης
Ασκήσεις Επανάληψης

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 1999-2004

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ Ο.Ε.Φ.Ε. 2000-2019

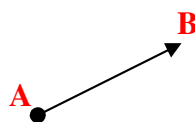
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Μάθημα 1

Κεφάλαιο : Διανυσματικός Λογισμός

Θεματικές ενότητες : 1. Η έννοια του διανύσματος
2. Πράξεις διανυσμάτων**1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ****➤ ΔΙΑΝΥΣΜΑ**

Ορισμός : Διάνυσμα είναι το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με διατεταγμένα άκρα.



Το **A** λέγεται **αρχή** του διανύσματος και το **B** **πέρας** του διανύσματος.

Συμβολίζεται: $\vec{AB}$ (πολλές φορές και για πρακτικούς λόγους ένα διάνυσμα συμβολίζεται μόνο με ένα μικρό γράμμα: πχ. $\vec{a}$).

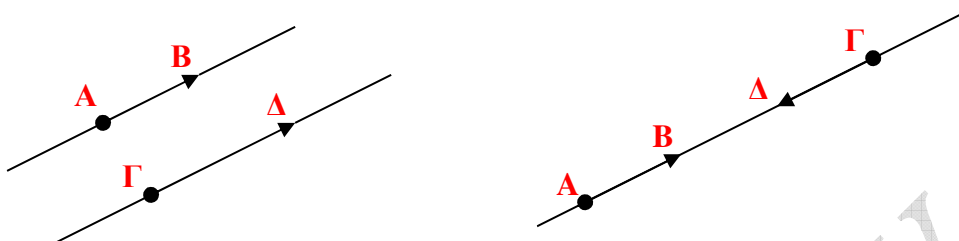
- Επειδή δύο σημεία του επιπέδου ορίζουν μοναδική ευθεία η ευθεία αυτή ονομάζεται **ΦΟΡΕΑΣ** ή **ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ** του διανύσματος ! Με άλλα λόγια **φορέας** διανύσματος (μη μηδενικού) είναι η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται αυτό το διάνυσμα.
- Επειδή το ζεύγος των σημείων είναι διατεταγμένο (δηλ. καθορίζεται η σειρά των σημείων) μας ορίζει τη **ΦΟΡΑ** !
- Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος (AB) ορίζει το **ΜΕΤΡΟ** του διανύσματος $\vec{AB}$ και συμβολίζεται με $|\vec{AB}|$. Προφανώς, $|\vec{AB}| \geq 0$.

ΣΧΟΛΙΑ:

1. Αν η αρχή και το πέρας του διανύσματος συμπίπτουν τότε λέμε το διάνυσμα είναι **μηδενικό**! Γράφουμε $\vec{AB} = \vec{0}$ και συμβολίζουμε με $\vec{0}$ (απαραίτητο το βελάκι πάνω από το μηδέν. Καταλαβαίνουμε ότι αυτό παριστάνει ένα σημείο).
2. Αν το ευθύγραμμο τμήμα έχει μέτρο 1 τότε λέμε το διάνυσμα **μοναδιαίο** και γράφουμε $|\vec{AB}| = 1$.

➤ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ Ή ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΑ

Ορισμός : Παράλληλα ή Συγγραμμικά λέγονται δύο μη μηδενικά διανύσματα όταν έχουν τον ίδιο φορέα ή οι φορείς τους είναι παράλληλες ευθείες. Αυτό σημαίνει ότι βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία ή σε παράλληλες ευθείες.

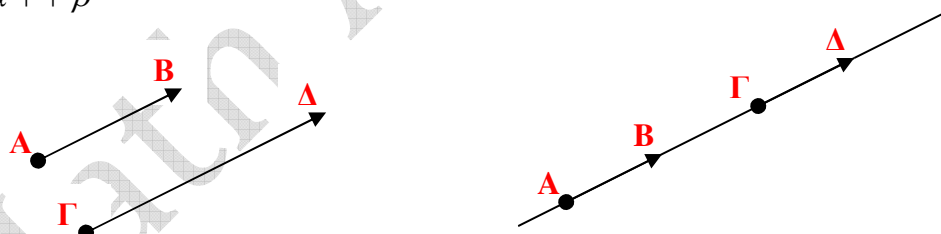


Συμβολίζουμε $\vec{AB} // \vec{\Gamma\Delta}$ και λέμε ότι αυτά τα διανύσματα έχουν ΙΔΙΑ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ.

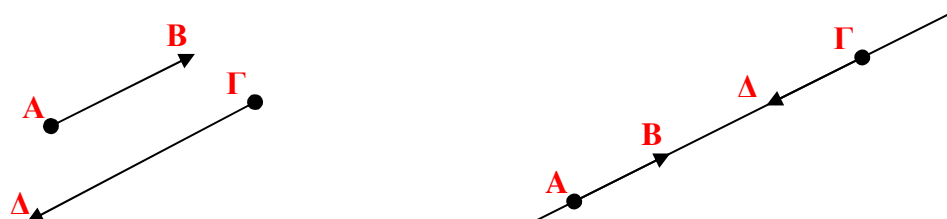
ΣΧΟΛΙΑ:

Αν έχω συγγραμμικά διανύσματα με την ίδια φορά τα λέμε **ομόρροπα**, γράφουμε $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$ και λέμε ότι αυτά έχουν την **ίδια κατεύθυνση**, ενώ αν έχουν αντίθετες φορές τα λέμε **αντίρροπα**, γράφουμε $\vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$ και λέμε ότι έχουν **αντίθετη κατεύθυνση**. Πιο Αναλυτικά:

- $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$



- $\vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$

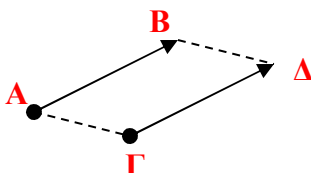


🔔 Το μηδενικό διάνυσμα δεν έχει συγκεκριμένη φορά και διεύθυνση!

🔔 Με τον όρο κατεύθυνση εννοούμε την «παραδοσιακή» φορά και διεύθυνση.

➤ **ΙΣΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ**

Ορισμός : Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ΙΣΑ** όταν έχουν **ΙΔΙΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ** (δηλαδή είναι ομόρροπα) και **ΙΣΑ ΜΕΤΡΑ**.



Συμβολίζουμε $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$ και προφανώς ισχύουν:

$$\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} : \begin{cases} \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} \\ \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{B\Delta} \\ \overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{\Gamma A} \end{cases}$$

➤ **ΜΕΣΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ**

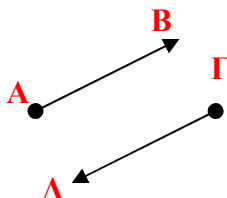
- Αν M μέσο του AB τότε: $\vec{AM} = \vec{MB}$ και αν $\vec{AM} = \vec{MB}$ τότε το M είναι το μέσο του AB



- Αν $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$ τότε το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο (γιατί οι απέναντι πλευρές του AB και ΓΔ είναι ίσες και παράλληλες).

➤ **ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ**

Ορισμός : Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ΑΝΤΙΘΕΤΑ** όταν έχουν **ΑΝΤΙΘΕΤΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΙ ΙΣΑ ΜΕΤΡΑ**.

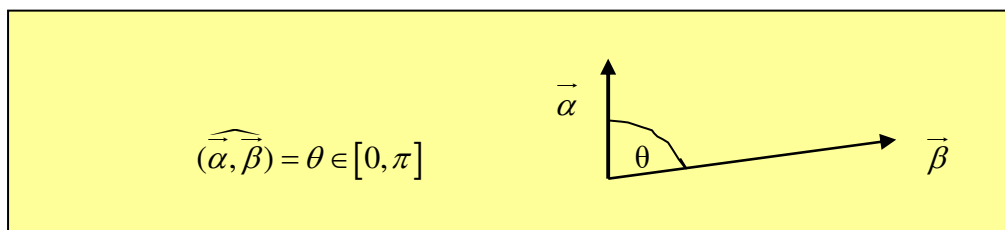


Συμβολίζουμε: $\vec{AB} = -\vec{\Gamma\Delta}$ και προφανώς ισχύει:

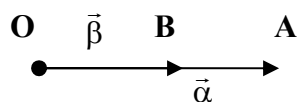
$$\vec{AB} = -\vec{BA}$$

➤ ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

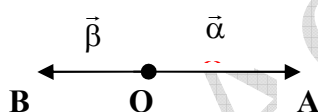
Αν έχω δύο μη μηδενικά διανύσματα με κοινή αρχή O δηλ. $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$
 Τη κυρτή γωνία των διευθύνσεών τους την ονομάζω γωνία των διανυσμάτων και γράφω:



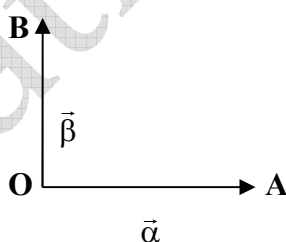
Επίσης: i) Αν $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$ τότε $\hat{\omega} = 0$



ii) Αν $\vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$ τότε $\hat{\omega} = \pi$



iii) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\hat{\omega} = \pi/2$

**ΣΧΟΛΙΑ:**

1. Αν κάποιο από τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ τότε γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία (με $0 \leq \omega \leq \pi$).
2. Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ θεωρείται ότι είναι παράλληλο ή κάθετο με οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα.

2. ΠΡΑΞΕΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

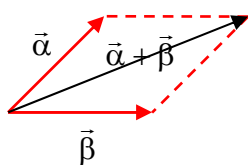
Ι. ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$



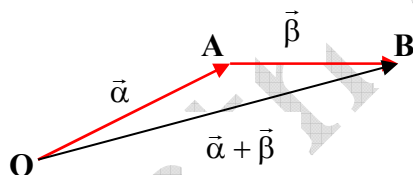
Το άθροισμα των δύο διανυσμάτων είναι και αυτό διάνυσμα και προκύπτει με ένα από τους παρακάτω τρόπους:

i)



(κανόνας παραλληλογράμμου –
διανύσματα με κοινή αρχή)

ii)



(κανόνας διαδοχικών διανυσμάτων)

Βλέπουμε: $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

ΣΧΟΛΙΟ: Ο β' τρόπος μπορεί να εφαρμοστεί και για άθροισμα παραπάνω των 2 διανυσμάτων: π.χ.: $\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GD} = \vec{AD}$

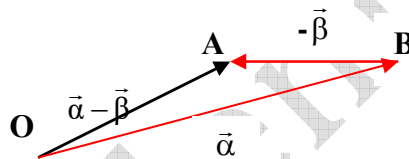
II. ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

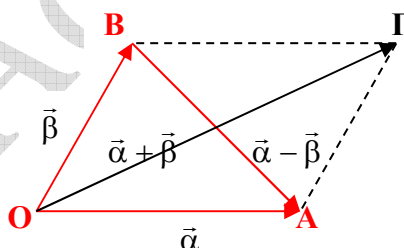


Η διαφορά των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι προφανώς το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$.

Ισχύει δηλαδή $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$. Έτσι :



Παρατήρηση: Αν θέλω να δω στο ίδιο σχήμα και το άθροισμα και τη διαφορά τότε σχηματίζω το παραλληλόγραμμο :

**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ**

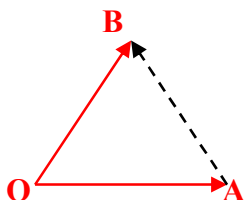
- i) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
- ii) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
- iii) $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ (ουδέτερο στοιχείο)
- iv) $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = (-\vec{\alpha}) + \vec{\alpha} = \vec{0}$ (αντίθετο στοιχείο)
- v) $\left| |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \right| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ (τριγωνική ανισότητα)

Σχόλιο: Αν $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$

ενώ αν $\left| |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \right| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ και αντιστρόφως.

➤ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΕΩΣ

Αν O είναι το σημείο αναφοράς όλων των διανυσμάτων, διάνυσμα θέσης ή, διανυσματική ακτίνα του σημείου M ονομάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, άρα αναλύοντας ένα τυχαίο διάνυσμα θα έχω $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, (ή $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$)



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

το οποίο μας δείχνει ότι **κάθε διάνυσμα ισούται με την διανυσματική ακτίνα του τέλους του μείον την διανυσματική ακτίνα της αρχής του.**

☞ Γενικότερα για τυχαία σημεία του επιπέδου μπορώ να έχω :

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LE} + \dots \overrightarrow{IK} \quad (\text{το τέλος του πρώτου ή αρχή του επόμενου!})$$

Π.χ. Σε τυχαίο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ δείξτε ότι $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Gamma}$

Έχω δύο τρόπους να εργασθώ :

$$1^{\text{ος}} : \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$$

2^{ος} : Αναλύω σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OG}) = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}) \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0}$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ Μ Ε Α Π Α Ν Τ Η Σ Η

1) Για τέσσερα τυχαία σημεία Α, Β, Γ, Δ του επιπέδου να δείξετε ότι

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{A\Gamma}.$$

ΛΥΣΗ:

Α' τρόπος (με πρόσθεση – αφαίρεση διανυσμάτων)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GB} \text{ που ισχύει.}$$

Β' τρόπος (με χρήση σημείου αναφοράς)

$$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Delta} + \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{A\Gamma}$$

2) Δίνεται σημείο αναφοράς Ο και $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ τα αντίστοιχα διανύσματα θέσεως των σημείων Α, Β, Γ, και Δ. Τι συμπέρασμα βγάξετε αν:

$$\text{i) } \vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\delta} \quad \text{ii) } |\vec{\alpha} - \vec{\gamma}| = |\vec{\beta} - \vec{\delta}|$$

ΛΥΣΗ:

$$\text{i) } \vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{O\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ΒΓ και ΓΔ ίσες και παράλληλες άρα είναι παραλληλόγραμμο.

$$\text{ii) } \vec{\alpha} - \vec{\gamma} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma A}$$

$$\vec{\beta} - \vec{\delta} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{\Delta B}$$

Έτσι: $|\overrightarrow{\Gamma A}| = |\overrightarrow{\Delta B}|$. Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει ίσες διαγώνιες.

3) Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ μη μηδενικά για τα οποία ισχύουν $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = |\vec{\gamma}|$ και

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 5|\vec{\gamma}|. \text{ Δείξτε ότι τα } \vec{\alpha}, \vec{\beta} \text{ είναι ομόρροπα } (\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}).$$

ΛΥΣΗ:

$$\text{Έχουμε: } \frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = |\vec{\gamma}| \text{ έτσι } |\vec{\alpha}| = 3|\vec{\gamma}| \text{ και } |\vec{\beta}| = 2|\vec{\gamma}|. \text{ Άρα } |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 3|\vec{\gamma}| + 2|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\gamma}|.$$

$$\text{Αλλά επίσης } |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 5|\vec{\gamma}|. \text{ Έτσι } |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|, \text{ δηλαδή } (\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}).$$

4) Αν ισχύει $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{KL}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B ταυτίζονται.

ΛΥΣΗ:

Έχουμε από την δοθείσα σχέση:

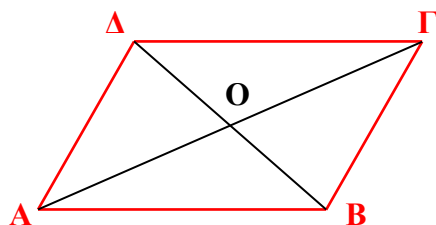
$$\begin{aligned}\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{KL} &\Leftrightarrow \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KL} = -\overrightarrow{AL} \Leftrightarrow \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{LA} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{LB} - \overrightarrow{LA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{AL} = \vec{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0}\end{aligned}$$

το οποίο μας λέει ότι τα σημεία A, B ταυτίζονται.

5) Παίρνουμε παραλληλόγραμμο ABΓΔ.

Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

- i) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$ ii) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GB}$ iii) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{OG}$ iv) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$ v) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OD}$



- i) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AG}$
 ii) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$
 iii) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{BG} - \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GO} = \overrightarrow{BO}$
 iv) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{OG}$
 v) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

6) Έστω τα σημεία K, Λ, M, N. Βρείτε σημείο P τέτοιο ώστε:

$$\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{LN} - \overrightarrow{MN}$$

ΛΥΣΗ:

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{LN} - \overrightarrow{MN} &\Leftrightarrow \overrightarrow{LP} - \overrightarrow{LN} = -\overrightarrow{KM} - \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{NP} = -(\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MN}) \Leftrightarrow \overrightarrow{NP} = -\overrightarrow{KN} \Leftrightarrow \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NK}\end{aligned}$$

Άρα το P ταυτίζεται με το K.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

A. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το σωστό(Σ) ή λάθος(Λ).

1. Τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AM}$ είναι διαδοχικά. Σ ☐ Λ ☐
2. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα, τότε έχουν την ίδια διεύθυνση. Σ ☐ Λ ☐
3. $\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AG}$ Σ ☐ Λ ☐
4. $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ Σ ☐ Λ ☐
5. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ Σ ☐ Λ ☐
6. Αν $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 0$ τότε τα διανύσματα είναι αντίθετα. Σ ☐ Λ ☐

B. ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

Αντιστοιχίστε τα στοιχεία της στήλης (A) με τα στοιχεία της στήλης (B).

ΣΤΗΛΗ (A)	ΣΤΗΛΗ (B)
1. $\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{BA}$	A. $\vec{\alpha} \nearrow \swarrow \vec{\beta}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$	B. $\vec{0}$
3. $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} $	Γ. $\overrightarrow{AG}$
4. $ \overrightarrow{AB} $	Δ. $\overrightarrow{AB}$
5. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$	E. $ \overrightarrow{BA} $
6. $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} $	Z. (3, -1)
7. $ \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} , \vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$	H. $\vec{\alpha} \nearrow \nearrow \vec{\beta}$
8. $ \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} , \vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$	Θ. 0
	I. $2 \overrightarrow{AB} $

Α Λ Υ Τ Ε Σ Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ οι αντίστοιχες διανυσματικές ακτίνες των σημείων A, B, Γ, Δ τι συμπεράσματα βγάζετε για το $AB\Gamma\Delta$ αν ισχύουν

$$(1) \quad |\vec{\alpha} - \vec{\gamma}| = |\vec{\beta} - \vec{\delta}| \quad (2) \quad \vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\delta} \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha} - \vec{\gamma}| = |\vec{\beta} - \vec{\delta}|$$

2. Αν για δύο τρίγωνα $AB\Gamma, A\Delta E$ ισχύει $\vec{AB} + \vec{A\Gamma} = \vec{A\Delta} + \vec{A\Xi}$ να δείξετε ότι το $B\Delta\Gamma E$ είναι παραλλ/μο

3. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ και O το μέσο του $A\Gamma$. Δείξτε ότι ισχύει $\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{AB} - \vec{A\Gamma}$

4. Δίνεται κανονικό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta E Z$ και $\vec{AB} = \vec{\alpha}, \vec{B\Gamma} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\Gamma\Delta}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

5. Δίνονται τα παραλλ/μα $AB\Gamma\Delta$ και $AB\Gamma'\Delta'$. Δείξτε ότι και το $\Delta\Gamma\Gamma'\Delta'$ παραλλ/μο.

6. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ . Να συγκριθούν τα διανύσματα $\vec{\chi} = \vec{AB} + \vec{A\Gamma}$ και $\vec{\psi} = \vec{A\Gamma} + \vec{AB}$ (δημιουργήστε τη διαφορά)

7. Αν για τα σημεία ισχύει η σχέση: $\vec{AB} + \vec{\Gamma A} = \vec{KB} + \vec{\Gamma\Lambda}$ να δείξετε ότι τα σημεία K, Λ ταυτίζονται.

8. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και M, N τα μέσα των πλευρών $AD, B\Gamma$ αντίστοιχα. Δείξτε ότι $\vec{MN} = \vec{AM} + \vec{N\Gamma}$

9. Αν για τα σημεία A, B, Γ ισχύει ότι $2|\vec{AB}| = 3|\vec{B\Gamma}| = 6|\vec{A\Gamma}|$ δείξτε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

10. Δίνονται τα σημεία K, Λ, M, N τέτοια ώστε: $\vec{K\Lambda} - \vec{N\Lambda} = \vec{NM} - \vec{KM}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία K και N ταυτίζονται.

11. Αν $AB\Gamma$ τυχαίο τρίγωνο να δείξετε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A} = \vec{0}$.

12. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ , και τα σημεία Δ, E τέτοια ώστε

$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι το A είναι μέσο του ΔE .

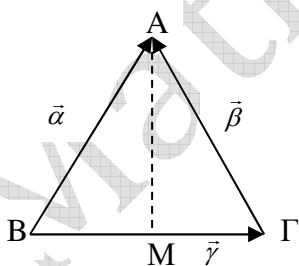
13. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Υπολογίστε τις γωνίες:

- i) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$ ii) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma})$ iii) $(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{B\Gamma})$ iv) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta})$

14. Υπολογίστε τα αθροίσματα:

- i) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{NM}$
 ii) $\overrightarrow{KI} - \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{AM}$
 iii) $\overrightarrow{LM} - \overrightarrow{KM} - \overrightarrow{LO}$
 iv) $\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{BN}$
 v) $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{KL} - \overrightarrow{AK}$

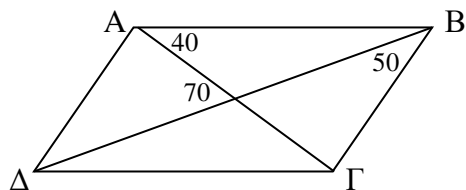
15. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. $\overrightarrow{BA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\Gamma A} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\gamma}$



Συμπληρώστε τα κενά:

- i) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} =$
 ii) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{\Gamma M} =$
 iii) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{A\Gamma} =$
 iv) $(\vec{\beta}, -\vec{\alpha}) =$
 v) $(\overrightarrow{MA}, -\vec{\beta})$

16. Συμπληρώστε τα κενά: με το ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο



i) $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{AB}) =$

ii) $(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{GB}) =$

iii) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DG} =$

iv) $\overrightarrow{DO} + \dots = \vec{O}$

v) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} =$

17. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{GD}$$

18. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ZG}$.
Να δείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

19. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ τυχαίο σημείο. Να δείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CK}$ ii) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{BK}$

20. Αν $|\vec{\alpha}| = 1$ και $|\vec{\beta}| = 4$, να αποδείξετε ότι: $3 \leq |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \leq 5$