Μάθημα 1

Κεφάλαιο 1ο: Συστήματα

Θεματικές Ενότητες:

Α. Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Β. Συστήματα 3x3

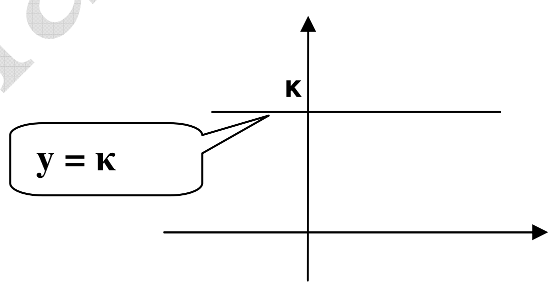
Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ορισμοί

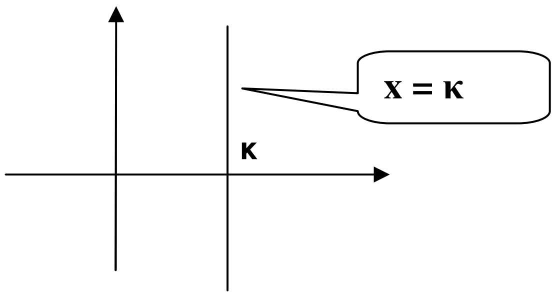
✓ Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία και καλείται **γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους**.

✓ Για να είναι μια εξίσωση με δύο αγνώστους γραμμική, θα πρέπει οι άγνωστοι να έχουν εκθέτη τη μονάδα.

✓ Αν α = 0 προκύπτει η ειδική περίπτωση $0 \cdot x + \beta y = \gamma \Leftrightarrow \beta y = \gamma \Leftrightarrow y = \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow y = \kappa$ δηλαδή ευθεία παράλληλη στο xx' που διέρχεται από το σημείο **κ** του yy' άξονα.



✓ Αν β = 0 προκύπτει η ειδική περίπτωση $\alpha x + 0 \cdot y = \gamma \Leftrightarrow \alpha x = \gamma \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x = \kappa$ δηλαδή ευθεία παράλληλη στο yy' που διέρχεται από το σημείο **κ** του xx' άξονα. (θυμίζουμε ότι αυτή ΔΕΝ είναι συνάρτηση….)



- ✓ Όταν ζητάμε τη κοινή λύση ή τις κοινές λύσεις δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους, τότε λέμε ότι έχουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους**. Η γενική μορφή ενός τέτοιου συστήματος είναι :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

- ✓ **Λύση** ενός συστήματος της παραπάνω μορφής ονομάζουμε το διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x, y) που επαληθεύει ταυτόχρονα και τις δύο εξισώσεις.

- ✓ Ο έλεγχος που κάνουμε προκειμένου να διαπιστώσουμε αν η λύση που βρήκαμε είναι σωστή καλείται **επαλήθευση**.

- ✓ Δύο γραμμικά συστήματα λέγονται **ισοδύναμα** όταν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις. Για να προκύψουν δύο ισοδύναμα συστήματα στηριζόμαστε στις εξής ιδιότητες των πραγματικών αριθμών:
  - Αν $\gamma \neq 0$, τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$
  - Αν α = β και γ = δ, τότε $\alpha + \gamma = \beta + \delta$

- ✓ Η διαδικασία εύρεσης της λύσης καλείται **επίλυση του συστήματος** και πραγματοποιείται με τους παρακάτω **τρεις τρόπους**.

Μεθοδολογία

✓ **Α΄ ΤΡΟΠΟΣ** : ***ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ***

Για να λύσουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους με τη μέθοδο της αντικατάστασης, εργαζόμαστε ως εξής:

- Λύνουμε μία από τις δύο εξισώσεις, οποία θέλουμε, ως προς τον έναν άγνωστο. (Συνήθως λύνουμε ως προς εκείνον τον άγνωστο που έχει το μικρότερο συντελεστή…)

- Αντικαθιστούμε την παράσταση του αγνώστου αυτού στη δεύτερη εξίσωση.

- Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει και βρίσκουμε την τιμή του ενός αγνώστου.

- Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στην πρώτη εξίσωση και υπολογίζουμε την τιμή του άλλου αγνώστου.

Π.χ: Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x+y=12 \\ 5x-2y=4 \end{cases}$

Λύση

Προκειμένου να λύσουμε αυτό το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης, εργαζόμαστε ως εξής:

Παίρνουμε τη μια από τις δύο εξισώσεις (οποία θέλουμε αλλά μας βολεύει να πάρουμε τη πιο απλή…) και τη λύνουμε ως προς τον ένα άγνωστο (επίσης ως προς οποίο άγνωστο θέλουμε…).

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή διαλέγω τη πρώτη εξίσωση του συστήματος και τη λύνω ως προς x. Έτσι προκύπτει το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} x=12-y \\ 5x-2y=4 \end{cases}$$

Τώρα αντικαθιστούμε το x στη δεύτερη εξίσωση και τη λύνουμε ως προς y. Αναλυτικά έχουμε:

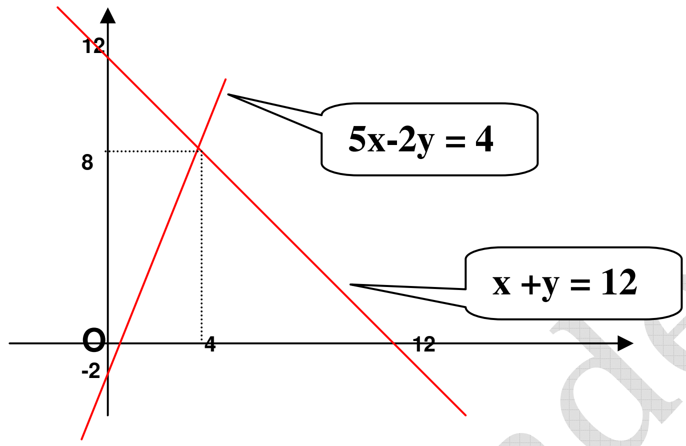
$$5\cdot(12-y)-2y=4 \Leftrightarrow 60-5y-2y=4 \Leftrightarrow -7y=4-60 \Leftrightarrow -7y=-56 \Leftrightarrow y=\frac{-56}{-7} \Leftrightarrow y=8$$

Τώρα αφού έχουμε βρει το y αντικαθιστούμε στη πρώτη εξίσωση και βρίσκουμε τον άλλο άγνωστο, δηλαδή τον x. Έτσι λοιπόν $x=12-y \Leftrightarrow x=12-8 \Leftrightarrow x=4$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (x, y) = (4, 8)

Επαλήθευση: Για x = 4 και y = 8, έχουμε:
1η Εξίσωση: $4+8=12 \Leftrightarrow 12=12$
2η Εξίσωση: $5\cdot 4-2\cdot 8=4 \Leftrightarrow 20-16=4 \Leftrightarrow 4=4$

(*) Η λύση που βρήκαμε είναι ουσιαστικά το σημείο τομής των δύο ευθειών που είναι οι γραφικές παραστάσεις των δύο εξισώσεων του συστήματος



✓ **Β΄ ΤΡΟΠΟΣ** : ***ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ***

Για να λύσουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, εργαζόμαστε ως εξής:

- Φέρνουμε τις δύο εξισώσεις του συστήματος στη μορφή αx + βy = γ φροντίζοντας να είναι τα x κάτω από τα x και τα y κάτω από τα y και στα δεύτερα μέλη οι γνωστοί όροι.

- Πολλαπλασιάζουμε τη μία ή και τις δύο εξισώσεις με κατάλληλο αριθμό ώστε οι συντελεστές του x (ή του y) στις δύο εξισώσεις να είναι αντίθετοι αριθμοί.

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε απαλείφεται ο άγνωστος x (ή ο y) και προκύπτει εξίσωση ως προς y (ή ως προς x), την οποία και επιλύουμε.

- Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μια από τις δύο αρχικές εξισώσεις, υπολογίζοντας έτσι την τιμή του άλλου αγνώστου.

Π.χ: Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x-y=3 & (1) \\ 2x+3y=6 & (2) \end{cases}$

Λύση

Προκειμένου να λύσουμε αυτό το σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, εργαζόμαστε ως εξής:

Πρώτα επιλέγουμε τον άγνωστο που θέλουμε να απαλείψουμε και προσπαθούμε να τον εμφανίσουμε στις δύο εξισώσεις με αντίθετους συντελεστές. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή θα κάνουμε απαλοιφή του y. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (1) με το 3 ενώ την (2) με το 1 για να παραμείνει ως έχει. Αναλυτικά έχουμε:

$$\left.\begin{cases} x-y=3 & \cdot 3 \\ 2x+3y=6 & \cdot 1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3y=9 & (3) \\ 2x+3y=6 & (4) \end{cases}$$

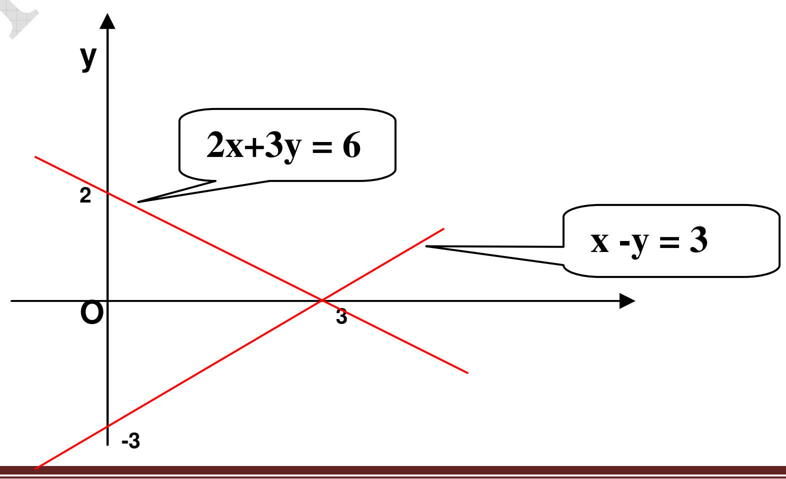
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3), (4) έχουμε:
$3x-3y+2x+3y=9+6 \Leftrightarrow 5x=15 \Leftrightarrow x=3$

Αντικαθιστώντας τη τιμή του x που βρήκαμε σε μία από τις δύο αρχικές εξισώσεις, βρίσκουμε τη τιμή του άλλου αγνώστου. Έτσι για x = 3 η (1) δίνει: $3-y=3 \Leftrightarrow y=0$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (x, y) = (3, 0)

Επαλήθευση: Για x = 3 και y = 0, έχουμε:
1η Εξίσωση: $3-0=3 \Leftrightarrow 3=3$
2η Εξίσωση: $2\cdot 3+3\cdot 0=6 \Leftrightarrow 6=6$

Το παρακάτω σχήμα μας δίνει τη **γραφική επίλυση του συστήματος**.



✓ **ΓΕΝΙΚΑ** για να λύσουμε ένα σύστημα θα πρέπει:

- Να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, αν υπάρχουν
- Να κάνουμε τις πράξεις και να χωρίσουμε γνωστούς από αγνώστους
- Να κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων
- Να βάλουμε τα x κάτω από τα x και τα y κάτω από τα y
- Να εφαρμόσουμε μία από τις μεθόδους επίλυσης που αναφέραμε.

Π.χ: Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} 4(3x-5)-2(y-x)=2 \\ 2(5x-y)-3y=5 \end{cases}$

Λύση

Διαδοχικά, κάνοντας πράξεις στο σύστημα έχουμε:

$$\left.\begin{cases} 4(3x-5)-2(y-x)=2 \\ 2(5x-y)-3y=5 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 12x-20-2y+2x=2 \\ 10x-2y-3y=5 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} 14x-2y=22 \\ 10x-5y=5 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 7x-y=11 \\ 2x-y=1 \end{cases}\right\}$$

Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\left.\begin{cases} 7x-y=11 & \cdot 1 \\ 2x-y=1 & \cdot(-1) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 7x-y=11 \\ -2x+y=-1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow 5x=10 \Leftrightarrow x=2$$

Αντικαθιστώντας στην 2x-y=1 το x = 2 θα έχουμε ότι y = 3. Συνεπώς η λύση του Συστήματος θα είναι η **(x, y) = (2, 3)**

✓ **Γ΄ ΤΡΟΠΟΣ** : ***ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ***

Ορίζουσα 2^{ης} Τάξης καλείται μια διάταξη αριθμών σε δύο γραμμές και δύο στήλες, που περικλείεται από δύο παράλληλες γραμμές.

π.χ $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

Ορίζουμε $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\cdot\delta - \beta\cdot\gamma$

Στο γραμμικό σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ αντιστοιχούν 3 ορίζουσες:

- Η ορίζουσα $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha \cdot \beta' - \alpha' \cdot \beta$ που έχει ως στοιχεία τους συντελεστές των αγνώστων και λέγεται **ορίζουσα του συστήματος.**

- Η ορίζουσα $D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma \cdot \beta' - \gamma' \cdot \beta$ η οποία προκύπτει από την D αν στη στήλη των συντελεστών του **x** θέσουμε τους σταθερούς όρους.

- Η ορίζουσα $D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha \cdot \gamma' - \alpha' \cdot \gamma$ η οποία προκύπτει από την D αν στη στήλη των συντελεστών του **y** θέσουμε τους σταθερούς όρους.

✓ Για τη λύση-διερεύνηση του συστήματος $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ ισχύουν τα εξής:

- Αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση την :

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

- Αν $D = 0$ και $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο,

- Αν $D = 0$ και $D_x = 0$ και $D_y = 0$, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, εκτός από τη περίπτωση όπου όλοι οι συντελεστές των αγνώστων είναι μηδέν ενώ ένας τουλάχιστον από τους σταθερούς όρους είναι διάφορος του μηδενός, οπότε και το σύστημα είναι αδύνατο…. (δηλ. εκτός και αν $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$ και $\gamma \neq 0$ ή $\gamma' \neq 0$ οπότε και είναι αδύνατο…)

Π.χ1: Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

Λύση

Υπολογίζω την ορίζουσα του συστήματος.

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - (-2) \cdot 1 = 9 + 2 = 11$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την: $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$

Αναλυτικά έχουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - (-2) \cdot 1 = 15 + 2 = 17$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 3 - 5 = -2$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι : $x = \frac{D_x}{D} = \frac{17}{11}$ και $y = \frac{D_y}{D} = -\frac{2}{11}$ δηλ. $(x, y) = \left(\frac{17}{11}, -\frac{2}{11}\right)$

Π.χ2: Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$

Λύση

Υπολογίζω την ορίζουσα του συστήματος.

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2 - 2 = 0$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι μηδέν οπότε θα πρέπει να υπολογίσω και τις D_x, D_y.

Εάν μία από τις δύο είναι διάφορη του μηδενός τότε το σύστημα είναι αδύνατο. Εάν και οι δύο προκύψουν μηδενικές τότε το σύστημα είναι αόριστο.

Αναλυτικά έχουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 5 \cdot 2 = 10 - 10 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 1 \cdot 5 = 5 - 5 = 0$$

Επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (**αόριστο**), τα ζεύγη $\left(x, \frac{5 - x}{2}\right)$, όπου x οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, ή τα ζεύγη $(5 - 2y, y)$, όπου y οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Π.χ3: Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x+3y=1 \\ 3x+9y=7 \end{cases}$

Λύση

Υπολογίζω την ορίζουσα του συστήματος.

$$D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}=1\cdot 9-3\cdot 3=9-9=0$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι μηδέν οπότε θα πρέπει να υπολογίσω και τις D_x, D_y.

Εάν μία από τις δύο είναι διάφορη του μηδενός τότε το σύστημα είναι αδύνατο. Εάν και οι δύο προκύψουν μηδενικές τότε το σύστημα είναι αόριστο.

Αναλυτικά έχουμε: $D_x=\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}=1\cdot 9-3\cdot 7=9-21=-12\neq 0$, άρα το σύστημα είναι **αδύνατο**…

Λυμένες Ασκήσεις

1. Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} x-y=2 & (1) \\ 2x-2y=4 & (2) \end{cases}$

Λύση

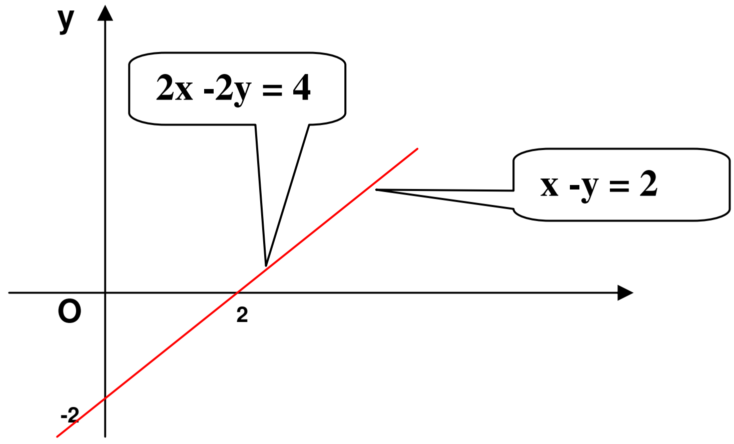
Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχω:

$$\left.\begin{cases} x-y=2 & \cdot(-2) \\ 2x-2y=4 & \cdot 1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} -2x+2y=-4 \\ 2x-2y=4 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow 0x+0y=0$$

Η εξίσωση 0x + 0y = 0 αληθεύει για κάθε x και y. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** ή ότι είναι **αόριστο**.

Η **Γραφική ερμηνεία** ενός τέτοιου συστήματος είναι ότι οι δύο εξισώσεις του συστήματος που παριστάνουν δύο ευθείες στο επίπεδο, συμπίπτουν.(Αφού έχουν άπειρα σημεία τομής…)

$x - y = 2 \Leftrightarrow y = x - 2$ και $2x - 2y = 4 \Leftrightarrow -2y = -2x + 4 \Leftrightarrow y = x - 2$



2. Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} 2x + 4y = 3 & (1) \\ 2x + 4y = -2 & (2) \end{cases}$

Λύση

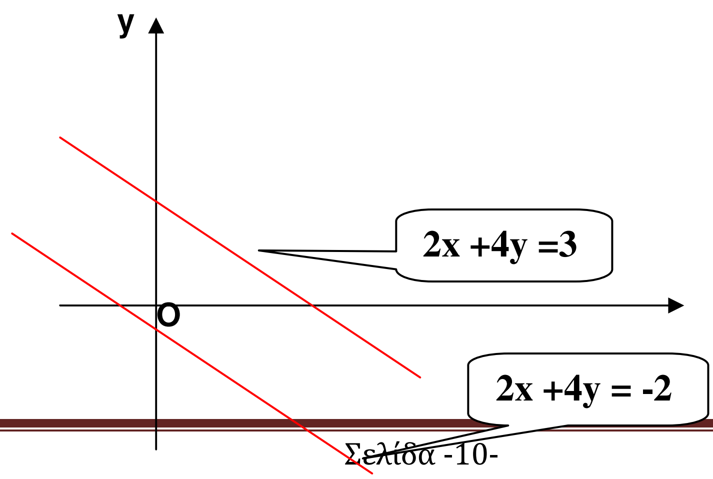
Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχω:

$$\left.\begin{cases} 2x + 4y = 3 & \cdot 1 \\ 2x + 4y = -2 & \cdot(-1) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ -2x - 4y = 2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow 0x + 0y = 5$$

Η εξίσωση 0x + 0y = 5 δεν αληθεύει για κανένα x και y, δηλαδή είναι αδύνατη. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.

Η **Γραφική ερμηνεία** ενός τέτοιου συστήματος είναι ότι οι δύο εξισώσεις του συστήματος που παριστάνουν δύο ευθείες στο επίπεδο, είναι παράλληλες.(Αφού δεν έχουν κανένα σημείο τομής…)

$2x + 4y = 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ $\qquad$ $2x + 4y = -2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$



3. Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} 2x+\lambda y=\lambda-2 \\ \lambda x+2y=4\lambda-8 \end{cases}$ *(παραμετρική)*

Λύση

- Υπολογίζω τις ορίζουσες D, D_x, D_y.
  Αναλυτικά έχουμε:
  $$D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{vmatrix}=4-\lambda^2=-\left(\lambda^2-4\right)=-(\lambda-2)(\lambda+2)$$
  $$D_x=\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda\text{-}2 & \lambda \\ 4\lambda\text{-}8 & 2 \end{vmatrix}=2(\lambda-2)-\lambda(4\lambda-8)=2(\lambda-2)-4\lambda(\lambda-2)=(\lambda-2)(2-4\lambda)=-2(2\lambda-1)(\lambda-2)$$
  $$D_y=\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & \lambda\text{-}2 \\ \lambda & 4\lambda\text{-}8 \end{vmatrix}=2(4\lambda-8)-\lambda(\lambda-2)=2\cdot4(\lambda-2)-\lambda(\lambda-2)=(\lambda-2)(8-\lambda)=-(\lambda-8)(\lambda-2)$$

- Βρίσκω για ποιες τιμές της παραμέτρου λ είναι D = 0.
  $D=0 \Leftrightarrow -(\lambda-2)(\lambda+2)=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ ή λ = -2

- Εξετάζω περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές της παραμέτρου.

(i) Αν $\lambda\neq2$ και $\lambda\neq$ -2, τότε $D\neq0$ και συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση την:
$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-2(2\lambda-1)(\lambda-2)}{-(\lambda-2)(\lambda+2)}=\frac{2(2\lambda-1)}{(\lambda+2)} \quad \text{και}$$
$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-(\lambda-8)(\lambda-2)}{-(\lambda-2)(\lambda+2)}=\frac{\lambda-8}{\lambda+2}$$

(ii) Αν λ = 2 το αρχικό σύστημα παίρνει μορφή $\begin{cases} 2x+2y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$ οπότε και είναι αόριστο, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις. Επειδή $2x+2y=0 \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$, λύσεις στην περίπτωση αυτή είναι όλα τα ζεύγη (x, -x), όπου x οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.(ή όλα τα ζεύγη της μορφής (κ, -κ), με $\kappa\in\mathbb{R}$)

(iii)Αν λ = -2, το αρχικό σύστημα παίρνει μορφή

$$\begin{cases} 2x-2y=-4 \\ -2x+2y=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-2 \\ x-y=8 \end{cases}$$ οπότε και είναι αδύνατο.

(*) Τόσο για λ = 2 όσο και για λ = -2, θα μπορούσαμε να εξετάσουμε αν είναι αόριστο ή
αδύνατο το σύστημα βρίσκοντας για τα συγκεκριμένες τιμές του λ τα D_X, D_Y. Αν για μια τιμή του λ τόσο το D_X όσο και το D_Y είναι *μηδέν*, τότε το σύστημα θα είναι **αόριστο**. Αν για μια τιμή του λ ***ένα*** από τα D_X, D_Y είναι *διάφορο του μηδενός* τότε το σύστημα θα είναι ***αδύνατο.***

Ερωτήσεις «Σωστού – Λάθους»

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ).

1. Αν (x_0, y_0) μια λύση της γραμμικής εξίσωσης **Σ Λ**

2. $\alpha x+\beta y=\gamma$, τότε $\alpha x_0+\beta y_0=\gamma$ **Σ Λ**

3. Τα ζεύγη $\left(\kappa, \frac{\gamma-\alpha\kappa}{\beta}\right)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x+\beta y=\gamma, \beta\neq 0$ **Σ Λ**

4. Η εξίσωση $\frac{1}{x}-2y=3$ είναι γραμμική **Σ Λ**

5. Η εξίσωση $x-y^3=\frac{1}{2}$ είναι γραμμική **Σ Λ**

6. Το σύστημα $\begin{cases} x=5 \\ x=0 \end{cases}$ είναι αδύνατο **Σ Λ**

7. Ισχύει $\begin{cases} x=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+y=0 \end{cases}$ **Σ Λ**

8. Ισχύει $\begin{cases} x+3y=-5 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ **Σ Λ**

9. Ισχύει $\begin{cases} 2x+5y=-17 \\ 4x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y+2x=-17 \\ y-4x=1 \end{cases}$ **Σ Λ**

10. Αν για ένα 2x2 γραμμικό σύστημα ισχύει $D = 2D_x$ και $D_y = -3D, D \neq 0$, τότε το σύστημα έχει λύση $x = \frac{1}{2}$ και $y = -3$ **Σ Λ**

11. Όταν **D** = 0, το 2x2 γραμμικό σύστημα είναι αδύνατο. **Σ Λ**

12. Ισχύει $\left\{\begin{matrix} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \lambda\alpha_1 x + \lambda\beta_1 y = \lambda\gamma_1, \lambda \neq 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{matrix}\right\}$ **Σ Λ**

13. Αν η ορίζουσα του συστήματος $\left\{\begin{matrix} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{matrix}\right\}$ είναι ίση με το μηδέν, τότε οι αντίστοιχες ευθείες των εξισώσεων είναι πάντα παράλληλες **Σ Λ**

14. Όταν τα στοιχεία μιας ορίζουσας είναι αρνητικοί αριθμοί, η τιμή της ορίζουσας είναι αρνητικός αριθμός. **Σ Λ**

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

Σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Η εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα σημεία (4, 5) και (4, -3) είναι η:
Α. $y = -3$ **Β.** $y = 4$ **Γ.** $x = 4$ **Δ.** $4x + 5y = -3$ **Ε.** $y = 4x$

2. Το σύστημα $\left\{\begin{matrix} y = 4x + 5 \\ 4x - y = 3 \end{matrix}\right\}$:
Α. έχει μία μόνο λύση **Β.** είναι αδύνατο **Γ.** είναι αόριστο
Δ. δεν προκύπτει κανένα συμπέρασμα για τη λύση του

3. Το σύστημα $\left\{\begin{matrix} 3x - 2y = 5 \\ 7x + y = -2 \end{matrix}\right\}$:
Α. έχει μία μόνο λύση **Β.** είναι αδύνατο
Γ. έχει λύσεις όλα τα ζεύγη $\left(x, \frac{3x-5}{2}\right), x \in \mathbb{R}$ **Δ.** δεν προκύπτει κανένα συμπέρασμα

4. Το σύστημα $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x+6y=10 \end{cases}$ **:**

Α. έχει λύσεις όλα τα ζεύγη $\left(\frac{5-3y}{2}, y\right), y \in \mathbb{R}$ **Β.** δεν έχει λύση

Γ. έχει μία μόνο λύση **Δ.** έχει λύσεις όλα τα ζεύγη $(x, 2x-5), x \in \mathbb{R}$

Ε. δεν προκύπτει κανένα συμπέρασμα για τη λύση του

5. Η ισοδύναμη της εξίσωσης $x=4$ είναι η εξίσωση:

Α. $2x=4$ **Β.** $x+y=4$ **Γ.** $x-y=4$ **Δ.** $\frac{1}{2}x-0y=4$ **Ε.** $\frac{1}{2}x-0y=2$

6. Η εξίσωση $y=3$ επαληθεύεται:

Α. μόνο από το ζεύγος (3, 0) **Β.** μόνο από το ζεύγος (0, 3)
Γ. μόνο από το ζεύγος (-1, 3) **Δ.** από όλα τα ζεύγη της μορφής(κ, 3) $\kappa \in \mathbb{R}$
Ε. από κανένα ζεύγος (x, y)

7. Το σύστημα $\begin{cases} \lambda x+y=7 \\ x-\lambda y=2\lambda \end{cases}$

Α. είναι αδύνατο για κάθε λ πραγματικό
Β. είναι αδύνατο για κάθε $\lambda \neq 0$
Γ. έχει άπειρες λύσεις για κάθε λ πραγματικό
Δ. έχει άπειρες λύσεις μόνο όταν $\lambda=\frac{7}{2}$
Ε. έχει μοναδική λύση για κάθε λ πραγματικό

8. Αν για ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τα **x** και **y** ισχύει $D \neq 0$ και $D-D_x+4D_y=0$, τότε τα **x** και **y** επαληθεύουν την εξίσωση:

Α. $x-4y=-1$ **Β.** $x+4y=1$ **Γ.** $x-4y=1$ **Δ.** $x-4y=x$ **Ε.** $x+\frac{1}{4}y=-1$

9. Το σύστημα $\begin{cases} \lambda x+y=7 \\ x+\lambda y=2\lambda \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις όταν:

Α. $\lambda=1$ **Β.** $\lambda=0$ **Γ.** $\lambda=1$ ή $\lambda=-1$ **Δ.** $\lambda=0$ ή $\lambda=-1$ **Ε.** $\lambda=2$

10. Η ορίζουσα $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 2x+1 & x \end{vmatrix}$ είναι ίση με:

Α. x^2-2x-1 **Β.** x^2-2x+1 **Γ.** $(x+1)^2$ **Δ.** $(x-1)^2$ **Ε.** x^2-2x

11. Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τα **x**, **y** έχει λύση $x=0$, $y=1$ τότε:

Α. $D_x=-2D_y$ **Β.** $2D_x=D_y$ **Γ.** $\frac{1}{2}D_x=D_y$ **Δ.** $\frac{1}{2}D_y=-D_x$ **Ε.** $D_x+D_y=1$

Ερωτήσεις Συμπλήρωσης Κενού

1. Μια λύση ενός συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους είναι …………που επαληθεύει……………….του συστήματος.

2. Αν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους παριστάνουν δύο παράλληλες ευθείες, τότε το σύστημα είναι ………………….

3. Αν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους παριστάνουν την ίδια ευθεία, τότε το σύστημα είναι ………………….

4. Έστω το σύστημα $\begin{cases} 3x-2y=\lambda \\ 4x+7y=3\lambda \end{cases}$, να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

- Οι ορίζουσες που αντιστοιχούν στο σύστημα είναι οι $D=\begin{vmatrix} 3 & .... \\ .... & 7 \end{vmatrix}$, $D_x=\begin{vmatrix} .... & -2 \\ .... & 7 \end{vmatrix}$ και $D_y=\begin{vmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{vmatrix}$
- Η λύση του συστήματος είναι η $x=\frac{....}{....}$ και $y=\frac{....}{....}$.

Ερωτήσεις Αντιστοίχησης

Αντιστοιχίστε τα στοιχεία της στήλης (Α) με τα στοιχεία της στήλης (Β).

ΣΤΗΛΗ (Α) ***Εξίσωση***	**ΣΤΗΛΗ (Β)** ***Λύση***
1. $2x-3y=6$ **2.** $x+\frac{5}{3}y=9$ **3.** $2x-y=13$ **4.** $\sqrt{2}\cdot x+y=3$ **5.** $5x+7y=-19$	**Α.** (4, -5) **Β.** $\left(\sqrt{2},1\right)$ **Γ.** (-1, -2) **Δ.** (0, -2) **Ε.** (9, 0) **ΣΤ.** (3, -1)

ΣΤΗΛΗ (Α) ***Ορίζουσα***	**ΣΤΗΛΗ (Β)** ***Τιμή***
1. $\begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha \\ \alpha & \alpha+1 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ \beta & \beta^2 \end{vmatrix}$	**Α.** $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$ **Β.** $-\alpha\beta(\alpha-\beta)$ **Γ.** 13 **Δ.** $\alpha+\beta$ **Ε.** -1

Άλυτες Ασκήσεις

1. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)}\begin{cases}4x-3y=6\\6x-y=16\end{cases}$$

$$\text{ii)}\begin{cases}7x-3y=23\\x+2y=13\end{cases}$$

$$\text{iii)}\begin{cases}3x+y=5\\3x+y=7\end{cases}$$

$$\text{iv)}\begin{cases}2x-3y=-6\\x-2y=6\end{cases}$$

$$\text{v)}\begin{cases}x-3y=2x+1\\4x+3y=3x-5\end{cases}$$

$$\text{vi)}\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}\\x-y=6\end{cases}$$

$$\text{vii)}\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{3-y}{2}\\\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+3}{2}\end{cases}$$

$$\text{viii)}\begin{cases}x=\dfrac{2x+y}{2}\\y=\dfrac{3(x-1)}{4}\end{cases}$$

$$\text{iv)}\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3\\\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=3\end{cases}$$

$$\text{x)}\begin{cases}\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{5}{2}\\\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{y}=\dfrac{7}{4}\end{cases}$$

$$\text{xi)}\begin{cases}|x|-|y|=-1\\4|x|-3|y|=8\end{cases}$$

$$\text{xii)}\begin{cases}2|x|+3|y|=5\\3|x|+2|y|=5\end{cases}$$

$$\text{xiii)}\begin{cases}3|x|-4|y|=10\\4|x|+3|y|=5\end{cases}$$

$$\text{xiv)}\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{3}=\dfrac{7}{6}\\\dfrac{x-y}{2}+\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{17}{6}\end{cases}$$

$$\text{xv)}\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{3}{2}\\\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

$$\text{xvi)}\begin{cases}7|x-1|+|y+2|=31\\3|x-1|-4|y+2|=0\end{cases}$$

$$\text{xvii)}\begin{cases}\dfrac{1}{|x+1|}+\dfrac{1}{|y-2|}=14\\\dfrac{3}{|x+1|}-\dfrac{1}{|y-2|}=7\end{cases}$$

$$\text{xviii)}\begin{cases}3\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\\5\sqrt{x}-2\sqrt{y}=1\end{cases}$$

$$\text{xix)}\begin{cases}6\sqrt{x}+7\sqrt{y}=1\\-3\sqrt{x}+4\sqrt{y}=7\end{cases}$$

$$\text{xx)}\begin{cases}2x^2-3y^2=-7\\x^2+5y^2=16\end{cases}$$

2. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

i) A(3, 2) και B(-2, -3)

ii) A(2, 4) και B(2, -3)

iii) A(-1, 3) και B(4, 3)

iv) A(1, 4) και B(-2, 1)

v) A(0, 0) και B(2, 3)

vi) A$(\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$ και B(-3, $\frac{1}{5}$)

3. Να βρείτε τα α,β ώστε το (Σ) $\begin{cases} \alpha x+\beta y=6 \\ (\alpha+2)x-(\beta-2)y=\alpha-5\beta+1 \end{cases}$ να έχει λύση το ζεύγος (-2, 3).

4. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\left\{\begin{array}{l} 2x+y=6 \\ 3x-2y=2 \end{array}\right\}$ ii) $\left\{\begin{array}{l} 3x+y=1 \\ x-y=-1 \end{array}\right\}$ iii) $\left\{\begin{array}{l} -x+2y=7 \\ 3x-y=0 \end{array}\right\}$

5. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\left\{\begin{array}{r} x+y=5 \\ y=2 \end{array}\right\}$ ii) $\left\{\begin{array}{l} 2x-y=-1 \\ x=1 \end{array}\right\}$ iii) $\left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ y=3 \end{array}\right\}$

6. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=2 \\ -4x-6y=1 \end{array}\right\}$ ii) $\left\{\begin{array}{l} -x+y=2 \\ 2x-2y=4 \end{array}\right\}$ iii) $\left\{\begin{array}{l} x=y \\ 3x-3y=0 \end{array}\right\}$

7. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\left\{\begin{array}{l} (x+y)+3(x-y)=-1 \\ 5(x+y)+4(x-y)=6 \end{array}\right\}$ ii) $\left\{\begin{array}{l} 2(x+2y)-3(x-y)=6 \\ 3(x+y)+4(3x+y)=22 \end{array}\right\}$

8. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω συστήματα έχουν λύση, ποια είναι αδύνατα-αόριστα.

i) $\left\{\begin{array}{l} 2x+y=6 \\ 3x-2y=2 \end{array}\right\}$ ii) $\left\{\begin{array}{l} x+3y=6 \\ -2x+6y=-12 \end{array}\right\}$ iii) $\left\{\begin{array}{l} 4x+2y=5 \\ -2x-y=1 \end{array}\right\}$

9. Δίνεται το σύστημα $\left\{\begin{array}{l} \alpha x-y=1 \\ -\alpha x+y=3 \end{array}\right\}$. Να εξηγήσετε γιατί είναι αδύνατο για οποιαδήποτε πραγματικό αριθμό α.

10. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\left\{\begin{array}{l} x-3y=6 \\ 2x+5y=1 \end{array}\right\}$ ii) $\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=25 \\ 7x+y=-5 \end{array}\right\}$ iii) $\left\{\begin{array}{l} x-3y=-2 \\ 2x+5y=7 \end{array}\right\}$

11. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}=y+2 \\ \dfrac{2x-y}{4}=\dfrac{y+x}{2} \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x=\dfrac{3y-5}{2} \\ y-x=1 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} y-2x=0 \\ y=\dfrac{3x-5}{2}+5 \end{cases}$

12. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} -x+2y=1 \\ 2x-4y=5 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 3x-7y=12 \\ -x+\dfrac{7}{3}y=-4 \end{cases}$

13. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} -3x+5y=1 \\ 6x-10y=2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x-3y=0 \\ 2x-6y=5 \end{cases}$

14. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 3x-y=-2 \\ -6x+2y=4 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 8x-12y=4 \\ -2x+3y=-1 \end{cases}$

15. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 3x+\dfrac{4}{3}y=2 \\ -x+\dfrac{8}{3}y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 7x+\dfrac{5}{4}y=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$ iii) $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{4}+\dfrac{x+y}{5}=-1 \\ \dfrac{-x+2y}{3}-\dfrac{x-y}{4}=3 \end{cases}$

16. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \sqrt{2}x-\sqrt{3}y=2 \\ 5x-\sqrt{2}y=5\sqrt{2} \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x+\sqrt{2}y=\sqrt{3}-2 \\ \sqrt{3}x+\sqrt{8}y=-1 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} 3(x+y)-2(x-y)=2 \\ -(x+y)+4(x-y)=-14 \end{cases}$

17. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x+y=5 \\ x\cdot y=6 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} y-x=28 \\ x\cdot y=-75 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2-y^2=-24 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} x+2y=7 \\ x^2-xy=-2 \end{cases}$

18. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}-\dfrac{y+2(x+1)}{4}=\dfrac{2-x}{5} \\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{3x+2y}{5}-\dfrac{11+x}{15} \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \dfrac{x}{y+4}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{y-4}{x+1}=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

19. Να λύσετε τα συστήματα με τη βοήθεια των οριζουσών:

i) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2x-3y=-6 \\ 4x+y=16 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 6x+9y=4 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} 3x-y=-1 \\ \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ v) $\begin{cases} x-3y=2x+1 \\ 4x+3y=3x-5 \end{cases}$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3x \end{vmatrix}=0$ ii) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -2 & 3x \end{vmatrix}=4x$ iii) $\begin{vmatrix} 3x-1 & 2-x \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=5-3x$

iv) $\begin{vmatrix} 4x+1 & 6 \\ x-1 & -3 \end{vmatrix}=3x-1$ v) $\begin{vmatrix} x^3-x & x^2-1 \\ x+1 & x^2-x-2 \end{vmatrix}=0$

21. Για τις διάφορες τιμές του λ, να λύσετε τα συστήματα :

i) $\begin{cases} \lambda x+y=\lambda \\ x+y=2\lambda-1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \lambda x+2y=\lambda+2 \\ (2\lambda-1)x+(\lambda+1)y=2(\lambda+1) \end{cases}$

iii) $\begin{cases} (\lambda+2)x+4y=8-3\lambda \\ 2x+(\lambda+4)y=8 \end{cases}$

22. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το σύστημα $\begin{cases} x+3y=6 \\ 2x+6y=\lambda \end{cases}$

i) έχει άπειρες λύσεις **ii)** είναι αδύνατο

23. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το σύστημα $\begin{cases} x+2y=\lambda \\ 2x+4y=5 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση.

24. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το σύστημα $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-2y=\lambda \end{cases}$ είναι αδύνατο.

25. Να βρείτε για ποια τιμή του λ τα συστήματα i) $\begin{cases} x+\lambda y=1 \\ \lambda x+y=\lambda^2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \lambda x-3y=4 \\ x-y=\dfrac{4}{3} \end{cases}$ έχουν άπειρες λύσεις.

26. Να βρείτε τα α, β, ώστε για τη συνάρτηση $f(x)=\alpha x(x+1)+\beta$ να ισχύει $f(-2)=1$ και $f(3)=21$.

27. Να βρεθούν τα x, y αν ισχύει ότι: $D_X{}^2+D_Y{}^2-2D_X+1=0$

28. Να λυθεί το σύστημα αν ισχύει ότι: $D_X{}^2+D_Y{}^2-2D_X D+D^2=0$

29. Να λυθεί το σύστημα $\left.\begin{cases} 3D_X-2D_Y=2 \\ D_X+D_Y=5 \end{cases}\right\}$ αν είναι γνωστό ότι D = -2.

30. Να λυθεί το σύστημα $\left.\begin{cases} 3D_X-2D_Y=2D \\ D_X+D_Y=5D \end{cases}\right\}$. (**Προσοχή:** Θα διακρίνεται περιπτώσεις...)

Β. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 3Χ3

Ορισμοί

✓ Ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους (3x3) θα είναι της μορφής :

$$\left.\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z=\delta' \\ \alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z=\delta'' \end{cases}\right\}$$

✓ Στην ειδική περίπτωση όπου οι σταθεροί όροι ενός γραμμικού συστήματος (3x3) είναι όλοι ίσοι με το μηδέν, το σύστημα τότε καλείται **ομογενές**. Έτσι ένα ομογενές σύστημα θα είναι της μορφής :

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z=0 \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z=0 \\ \alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z=0 \end{cases}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Παρατηρούμε ότι μια προφανή λύση που έχουν τα ομογενή συστήματα είναι η μηδενική, δηλαδή η (x, y, z) = (0, 0, 0), αφού αν βάλουμε όπου x = 0, y = 0 και z = 0 το σύστημα επαληθεύεται.

- Εκτός όμως από τη μηδενική λύση, τα ομογενή συστήματα μπορεί να έχουν και επιπλέον λύσεις, όπως θα δούμε αναλυτικά στην εφαρμογή 2 που ακολουθεί.

Μεθοδολογία - Εφαρμογές

✓ Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x-y-\omega=6 & (1) \\ x-2y-3\omega=10 & (2) \\ 5x+6y+\omega=2 & (3) \end{cases}$

Λύση

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να λυθεί με έναν από τους παρακάτω δύο τρόπους.

<u>Α΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

Παίρνουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις και δημιουργούμε ένα σύστημα με αγνώστους τους x και y. Έπειτα λύνουμε αυτό το σύστημα και τις τιμές των x και y τις αντικαθιστούμε στην τρίτη εξίσωση.

Αναλυτικά παίρνοντας τις εξισώσεις (1), (2) του συστήματος έχουμε :

$$\begin{cases} x-y=6-\omega \\ x-2y=10+3\omega \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε ότι:
$x=2-\omega$ και $y=-2\omega-4$.

Αντικαθιστώντας τώρα τις τιμές x, y στην εξίσωση (3) του συστήματος προκύπτει εξίσωση ως προς ω…
$5(2-\omega)+6(-2\omega-4)+\omega=2 \Leftrightarrow \omega=-1$.

Έτσι $x=2-(-1)=3$ και $y=-2(-1)-4=-2$

Οπότε η λύση του συστήματος είναι η: (x, y, z) = (3, -2, -1)

<u>Β΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

Από τις εξισώσεις (1) και (2) του συστήματος απαλείφουμε έναν από τους τρεις αγνώστους, για παράδειγμα τον x. Αναλυτικά έχουμε:

$$\begin{cases} x-y-\omega=6 \\ x-2y-3\omega=10 \;\cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-\omega=6 \\ -x+2y+3\omega=-10 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε : $y+2\omega=-4$

Επίσης από τις εξισώσεις (1) και (3) του συστήματος απαλείφουμε πάλι τον ίδιο άγνωστο(τον x) και έχουμε:

$$\begin{cases} x-y-\omega=6 \;\;\cdot(-5) \\ 5x+6y+\omega=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+5y+5\omega=-30 \\ 5x+6y+\omega=2 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε : $11y+6\omega=-28$

Έτσι το αρχικό σύστημα παίρνει μορφή: $\begin{cases} x-y-\omega=6 \\ y+2\omega=-4 \\ 11y+6\omega=-28 \end{cases}$

Λύνοντας το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων έχουμε:

$$\begin{cases} y+2\omega=-4 \;\;\cdot(-11) \\ 11y+6\omega=-28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y-22\omega=44 \\ 11y+6\omega=-28 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε : $\omega=-1$

Έτσι το σύστημα παίρνει μορφή: $\begin{cases} x-y-\omega=6 \\ y+2\omega=-4 \\ \omega=-1 \end{cases}$

Αντικαθιστώντας την τιμή του ω στη δεύτερη εξίσωση προκύπτει η τιμή του y.
$y-2=-4 \Leftrightarrow y=-2$

Για y = -2 και ω = -1 η πρώτη εξίσωση δίνει $x+2+1=6 \Leftrightarrow x=3$

Άρα η λύση του συστήματος είναι η: (x, y, z) = (3, -2, -1)

✓ Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+3y+4\omega=0 & (1) \\ x+2y+3\omega=0 & (2) \\ x-y \qquad =0 & (3) \end{cases}$ (Ομογενές Σύστημα)

Λύση

Το σύστημα είναι ομογενές οπότε έχει εξ'ορισμού τη μηδενική λύση (0, 0, 0). Εξετάζουμε εάν έχει και άλλες λύσεις.

Από τις εξισώσεις (1) και (2) του συστήματος απαλείφουμε τον x.

Αναλυτικά έχουμε:

$$\begin{cases} x+3y+4\omega=0 & \cdot(-1) \\ x+2y+3\omega=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-3y-4\omega=6 \\ x+2y+3\omega=0 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε : $-y-\omega=0$

Από τις εξισώσεις (2) και (3) του συστήματος με απαλοιφή του x έχουμε:

$$\begin{cases} x+2y+3\omega=0 \\ x-y=0 & \cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3\omega=0 \\ -x+y+0\omega=0 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε : $3y+3\omega=0$

Έτσι το αρχικό σύστημα παίρνει μορφή: $\begin{cases} x+3y+4\omega=0 \\ -y-\omega=0 \\ 3y+3\omega=0 \end{cases}$ ή

$\begin{cases} x+3y+4\omega=0 \\ y+\omega=0 \\ y+\omega=0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x+3y+4\omega=0 \\ y+\omega=0 \end{cases}$. Άρα είναι

$y=-\omega$ και $x-3\omega+4\omega=0 \Leftrightarrow x=-\omega$

Επομένως για κάθε τιμή του ω, για παράδειγμα ω = λ, έχουμε και μία λύση του συστήματος, τη x = -λ, y = -λ και ω = λ. Δηλαδή το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής **(-λ, -λ, λ)**, όπου λ πραγματικός αριθμός.

ΓΕΝΙΚΑ τα ομογενή συστήματα μπορεί να έχουν:

- Είτε μόνο τη μηδενική λύση (0, 0, 0)
- Είτε άπειρες λύσεις, στις οποίες περιλαμβάνεται και η μηδενική, όπως στη παραπάνω εφαρμογή, αφού για λ = 0 προκύπτει η λύση (0, 0, 0)

✓ Να λυθεί το σύστημα $\left\{\begin{array}{ll} x+y=3 & (1) \\ y+\omega=7 & (2) \\ \omega+x=4 & (3) \end{array}\right\}$

Λύση

Η λύση του παραπάνω συστήματος μπορεί να βρεθεί με τους παραπάνω δύο τρόπους επίλυσης, ωστόσο χρησιμοποιώντας την ακόλουθη τεχνική μπορούμε με πολύ εύκολο τρόπο να προσδιορίσουμε τη λύση του συστήματος.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του συστήματος και έχουμε:
$2(x+y+\omega)=14 \Leftrightarrow x+y+\omega=7 \quad (4)$

Αφαιρούμε τώρα από την (4) διαδοχικά τις (1), (2) και (3) και παίρνουμε:

$$\begin{array}{rl} & x+y+\omega=7 \\ (-) & x+y \quad\;\; =3 \\ \hline & \omega=4 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & x+y+\omega=7 \\ (-) & y+\omega=7 \\ \hline & x=0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & x+y+\omega=7 \\ (-) & x+ \quad \omega=4 \\ \hline & y=3 \end{array}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι : (x, y, ω) = (0, 3, 4)

Άλυτες Ασκήσεις

1. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)}\begin{cases} x+5y-6\omega=7 \\ 2y+3\omega=2 \\ 5\omega=10 \end{cases} \qquad \text{v)}\begin{cases} x+3y-2\omega=4 \\ x-y+2\omega=4 \\ x+2y-\omega=4 \end{cases}$$

$$\text{ii)}\begin{cases} x+y+\omega=3 \\ 3x-2y+\omega=2 \\ x+y-\omega=1 \end{cases} \qquad \text{vi)}\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y-z=2 \\ 3x+6y-4z=3 \end{cases} \qquad \text{ix)}\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+4y-z=2 \\ 3x+6y-4z=3 \end{cases}$$

$$\text{iii)}\begin{cases} 3x+y-z=1 \\ x-y+2z=-1 \\ 2x+2y-3z=2 \end{cases} \qquad \text{vii)}\begin{cases} 2x+3y+4z=3 \\ 4x+3y-4z=2 \\ 6x-6y+8z=3 \end{cases}$$

$$\text{iv)}\begin{cases} 4x-2y-z=-15 \\ 4x+y+z=-9 \\ 2x-3y+3z=3 \end{cases} \qquad \text{viii)}\begin{cases} x+y+z=9 \\ 2x+3y+4z=23 \\ 4x-6y-2z=0 \end{cases}$$

2. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)}\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ 2x-2y-2z=0 \end{cases} \qquad \text{ii)}\begin{cases} -x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ 3x-3y-z=0 \end{cases}$$

$$\text{iii)}\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+3y+3z=0 \\ 4x+4y+4z=0 \end{cases} \qquad \text{iv)}\begin{cases} 4x+3y+17z=0 \\ 5x+4y+22z=0 \\ 4x+2y+19z=0 \end{cases}$$

3. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)}\begin{cases} x+y=4 \\ y+z=-3 \\ x+z=-5 \end{cases} \quad \text{ii)}\begin{cases} x+y=0 \\ x+z=-1 \\ y+z=3 \end{cases} \qquad \text{iii)}\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{x+z}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

4. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x+y-\omega=5 \\ y+\omega-x=7 \\ \omega+x-y=4 \end{cases}$