Μάθημα 1

Κεφάλαιο: Διαφορικός Λογισμός

Θεματικές Ενότητες:

1. Η έννοια της συνάρτησης.
2. Πεδίο ορισμού συνάρτησης.

Τι είναι πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής ;

Είναι μια ειδικής μορφής «διαδικασία» («μηχανή») που επεξεργάζεται αριθμούς.

Κάθε πραγματικό αριθμό που παραλαμβάνει τον αντιστοιχεί **σε έναν μόνο** πραγματικό αριθμό.

Αυτή τη διαδικασία – μηχανή τη συμβολίζω με f, g, h, κ.λ.π.

Ορισμός Συνάρτησης

Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, μια σχέση μεταξύ δύο αριθμητικών συνόλων $A, B \subseteq R$ η οποία αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο του συνόλου Α **σε ένα μόνο** στοιχείο του συνόλου Β.

Από πού «επιλέγει» η συνάρτηση αυτούς τους αριθμούς ;

Από ένα σύνολο – υποσύνολο του R, το οποίο συμβολίζεται με A_f ή D_f και ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης.

Τα στοιχεία (οι αριθμοί) που περιέχονται στο σύνολο A_f συμβολίζονται με x και αποτελούν τις τιμές της **ανεξάρτητης μεταβλητής** της συνάρτησης.

Πού τους «μεταφέρει» αυτούς τους αριθμούς ;

Σε ένα σύνολο που το συμβολίζω με $f(A_f)$ ή $f(D_f)$ και το ονομάζω **σύνολο τιμών** της συνάρτησης.

Τα στοιχεία (οι αριθμοί) που περιέχονται στο σύνολο $f(A_f)$ συμβολίζονται με $y = f(x)$ και αποτελούν τις τιμές της **εξαρτημένης μεταβλητής** της συνάρτησης.

Τελικά: Μια συνάρτηση f που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A_f \subseteq R$ και οι τιμές της είναι πραγματικοί αριθμοί, αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο (δηλαδή κάθε αριθμό) χ του συνόλου A_f, σε ένα μόνο στοιχείο (δηλαδή σε ένα μόνο αριθμό) $y = f(x)$ του συνόλου τιμών της $f(A_f) \subseteq R$.

Συμβολίζουμε:

1. D_f ή A_f, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
2. $f(D_f)$ ή $f(A_f)$, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f
3. $f : A_f \to R$ κάθε πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, η οποία αντιστοιχεί κάθε στοιχείο (δηλαδή κάθε αριθμό) χ του συνόλου A_f στο στοιχείο (δηλαδή στον αριθμό) $y = f(x)$ του συνόλου $f(A_f) \subseteq R$.

Πότε μπορώ να πω ότι «ξέρω» μια συνάρτηση ;

1. Όταν ξέρω (ή μπορώ να βρω) το πεδίο ορισμού της
2. Όταν ξέρω τον τύπο της

Ποιοι περιορισμοί καθορίζουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης ;

Περιορισμοί που καθορίζουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης	
Αν δω…	**Απαιτώ…**
Κλάσμα	Παρονομαστής $\neq 0$
Ρίζα (οποιασδήποτε τάξης)	Υπόριζη ποσότητα ≥ 0
Λογάριθμο (ln ή log)	Ό,τι λογαριθμίζεται > 0

Παρατηρήσεις.

- Μπορεί να απαιτείται και συνδυασμός δύο ή περισσότερων από τους προηγούμενους περιορισμούς (π.χ. στον τύπο της συνάρτησης να έχουμε και κλάσμα και ρίζα, ή και ρίζα και λογάριθμο). Σε κάθε τέτοια περίπτωση, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης προκύπτει από το αποτέλεσμα της **συναλήθευσης** όλων των απαιτούμενων περιορισμών.

- Αν δεν απαιτείται κανένας περιορισμός (αν δηλαδή ο τύπος της συνάρτησης δεν περιέχει ούτε κλάσμα ούτε λογάριθμο ούτε ρίζα), τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι (ολόκληρο) το R.

Λυμένες ασκήσεις.

1. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = $\dfrac{x\ell n(x+1)}{\sqrt{x-1}}$

Λύση

Πρέπει:
$$\begin{cases} x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \\ x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1 \\ \sqrt{x-1}\neq 0 \Leftrightarrow x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \end{cases}$$

Συναληθεύοντας τα αποτελέσματα έχουμε $A_f=(1,+\infty)$.

2. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = $\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$.

Λύση.

Πρέπει να είναι: $x^2-3x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1, x\neq 2$ (οι ρίζες 1 και 2 βρίσκονται κατά τα γνωστά, με τη διακρίνουσα $\Delta=b^2-4ac$ και τον τύπο $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$), οπότε έχουμε:

$D_f=R-\{1,2\}=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$

3. Όμοια, της f(x) = $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Λύση.

Πρέπει : $\begin{cases} x\neq 0 \\ 1-x^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x^2\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ \sqrt{x^2}\leq\sqrt{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ |x|\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases}$

Άρα $A_f=[-1,0)\cup(0,1]$.

4. Όμοια, της $f(x) = \ln(1-e^x)$.

Λύση.

Πρέπει : $1- e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x<0$

Άρα $D_f =(-\infty , 0)$.

5. Όμοια, της $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$.

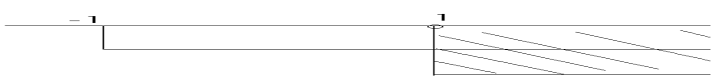
Λύση.

Πρέπει : $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{x-1} \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x-1 \neq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$

Άρα $D_f =(1, +\infty)$.

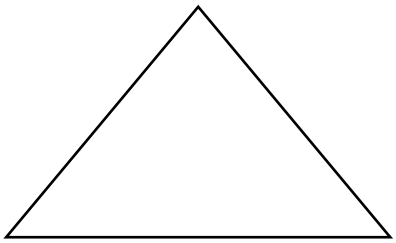
Είστε σίγουροι ότι τη διαδικασία της συναλήθευσης τη γνωρίζετε; (Ύλη της 1ης λυκείου είναι, αλλά επειδή, κατά τους «ειδικούς» και άσχετους που σας γλύφουν για να δημιουργήσουν εντυπώσεις και έτσι να υπηρετήσουν το προσωπικό τους συμφέρον, είστε «οι πιο σκληρά εργαζόμενοι Έλληνες», μπορεί, όταν έπρεπε να τα μελετήσετε αυτά, εσείς να είχατε άλλη «εργασία»…).

Για το πιο πάνω παράδειγμά λοιπόν, η συναλήθευση των επιμέρους λύσεων (η οποία θα δίνει και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης) φαίνεται στο επόμενο «σχηματάκι»:



6. Σύρμα μήκους $\ell = 20$cm κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x cm και (20 – x) cm. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο κομμάτι ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρείς το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του x.

Λύση.



Πλευρά x/4

Πλευρά $\frac{20-x}{3}$

Ξέρουμε ότι το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α ισούται με α^2

ΕΔΩ : $E_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$

Ξέρουμε ότι το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α ισούται με $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

ΕΔΩ : $E_2 = \left(\frac{20-x}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

Άρα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = E_1+E_2 = \frac{x^2}{16}+\left(\frac{20-x}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, $x \in (0, 20)$.

Άλυτες Ασκήσεις.

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων

1. $f(x)=\sqrt{x-\frac{4}{x}}$.
2. $f(x)=\frac{2006}{\sqrt{x^3+x-2}}$
3. $f(x)=\ell og(\ell nx)$.
4. $f(x)=\frac{2x}{(x-1)(x^3-8)}$.
5. $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$.
6. $f(x)=\ln(x^2-x+1)$.
7. $f(x)=\sqrt{x^3-2x+1}$.
8. $f(x)=\ln(1-x^2)$.
9. $f(x)=\sqrt{x^3-5x+2}$.
10. $f(x)=\ln[\ln(x+3)]$.
11. $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}$.
12. $f(x)=\frac{x^{2007}+\sqrt{x^{2008}}}{\sqrt{x^3+x-30}}$
13. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.
14. $f(x)=\ln[\log(x-1)]$.
15. $f(x)=\sqrt{x^6+1}$.
16. $f(x)=\ln x+1$.
17. $f(x)=\sqrt{x^4-1}$.
18. $f(x)=\ln x-2$.
19. $f(x)=\sqrt{\ln(x^2-5x+6)}$.
20. $f(x)=\ln x+3$.
21. $f(x)=\sqrt[3]{x+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-3x-4}}$.
22. $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{1-x}}$.
23. $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^3+1}}$.
24. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x^{2006}}+\sqrt{x^{2007}-1}$

25. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-4}}{10-|x+5|}$.

26. $f(x)=\dfrac{\varepsilon\phi 2\chi+1}{\sigma\upsilon\nu 2\chi+1}$.

27. $f(x)=\ln(4^x+2^x-20)$.

28. $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{1-\eta\mu x}}$.

29. $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{2}}}$.

30. $f(x)=\dfrac{e^{x-1}}{\ln(9^x-2\cdot 3^x-3)}$.

31. $f(x)=\ln[\ln(\ln x)]$.

32. $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-x}-\dfrac{x^2-3x+2}{x}$.

33. $f(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{1}{x(2x-1)}}$.

34. $f(\chi)=\dfrac{1}{2\eta\mu^3\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi+2\eta\mu\chi-2}$.

35. $f(x)=\log(x+1)+\log(x-1)-\log 2$.

36. $f(x)=\log(x-1)+\log x-1+\log 5$.

37. $f(x)=\log x^2-(\log x)^2$.

38. $f(x)=\log(x^2+1)-\log x-\log 2$.

39. $f(x)=5^x-2^{1-x}$.

40. $f(\chi)=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi}{5}+1$.