Μάθημα 1

Κεφάλαιο: Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

Θεματικές Ενότητες:

1. Η έννοια της συνάρτησης.
2. Πεδίο ορισμού συνάρτησης.
3. Σύνολο τιμών συνάρτησης.

Τι είναι πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής ;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω A ένα υποσύνολο του R. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το** A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της** f **στο** x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Από πού «επιλέγει» η συνάρτηση αυτούς τους αριθμούς ;

Από ένα σύνολο – υποσύνολο του R, το οποίο συμβολίζεται με A_f ή D_f και ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης.

Τα στοιχεία (οι αριθμοί) που περιέχονται στο σύνολο A_f συμβολίζονται με x και αποτελούν τις τιμές της **ανεξάρτητης μεταβλητής** της συνάρτησης.

Πού τους «μεταφέρει» αυτούς τους αριθμούς ;

Σε ένα σύνολο που το συμβολίζω με $f(A_f)$ ή $f(D_f)$ και το ονομάζω **σύνολο τιμών** της συνάρτησης.

Τα στοιχεία (οι αριθμοί) που περιέχονται στο σύνολο $f(A_f)$ συμβολίζονται με $y = f(x)$ και αποτελούν τις τιμές της **εξαρτημένης μεταβλητής** της συνάρτησης.

Τελικά: Μια συνάρτηση f που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A_f \subseteq R$ και οι τιμές της είναι πραγματικοί αριθμοί, αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο (δηλαδή κάθε αριθμό) χ του συνόλου A_f, σε ένα μόνο στοιχείο (δηλαδή σε ένα μόνο αριθμό) $y = f(x)$ του συνόλου τιμών της $f(A_f) \subseteq R$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Για παράδειγμα η σχέση $x^2 + y^2 = 1$ (μοναδιαίος κύκλος) **ΔΕΝ** είναι συνάρτηση αφού αν λύσουμε ως προς y, $y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$, για κάθε τιμή του χ προκύπτουν 2 τιμές του y.

Συμβολίζουμε:

1. D_f ή A_f, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
2. $f(D_f)$ ή $f(A_f)$, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f
3. Όταν γράφουμε $f: A \to \mathrm{B}$, το Β λέγεται **σύνολο αφίξεως,** και ισχύει ότι $f(A_f) \subseteq \mathrm{B}$.
4. Γενικά ορίζουμε $f: A_f \to R$ κάθε πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, η οποία αντιστοιχεί κάθε στοιχείο (δηλαδή κάθε αριθμό) χ του συνόλου A_f στο στοιχείο (δηλαδή στον αριθμό) $y = f(x)$ του συνόλου $f(A_f) \subseteq R$.
5. Έτσι ισχύει ο παρακάτω ορισμός:

$f: A \to B$ συναρτηση $\Leftrightarrow$ Για καθε $x_1, x_2 \in A$ ισχυει:
Αν $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

ή ισοδύναμα

$f: A \to B$ συναρτηση $\Leftrightarrow$ Για καθε $x_1, x_2 \in A$ ισχυει:
Αν $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Πότε μπορώ να πω ότι «ξέρω» μια συνάρτηση ;

1. Όταν ξέρω (ή μπορώ να βρω) το πεδίο ορισμού της
2. Όταν ξέρω τον τύπο της

Ποιοι περιορισμοί καθορίζουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης ;

Περιορισμοί που καθορίζουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης	
Αν η συνάρτηση περιέχει…	**Απαιτώ…**
Κλάσμα $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$	Παρονομαστής $Q(x)\neq 0$
Ρίζα (οποιασδήποτε τάξης) $f(x)=\sqrt[\nu]{P(x)},\nu\in R^{*}-\{1\}$	Υπόριζη ποσότητα $P(x)\geq 0$
Λογάριθμο (ln ή log) $f(x)=\ln(P(x))$	Ό,τι λογαριθμίζεται $P(x)>0$
$f(x)=\varepsilon\varphi(P(x))$	$P(x)\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in Z$
$f(x)=\sigma\varphi(P(x))$	$P(x)\neq \kappa\pi,\kappa\in Z$
$f(x)=(P(x))^{Q(x)}$	$P(x)>0$

Παρατηρήσεις

- Μπορεί να απαιτείται και συνδυασμός δύο ή περισσότερων από τους προηγούμενους περιορισμούς (π.χ. στον τύπο της συνάρτησης να έχουμε και κλάσμα και ρίζα, ή και ρίζα και λογάριθμο). Σε κάθε τέτοια περίπτωση, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης προκύπτει από το αποτέλεσμα της **συναλήθευσης** όλων των απαιτούμενων περιορισμών.

- Αν δεν απαιτείται κανένας περιορισμός (αν δηλαδή ο τύπος της συνάρτησης δεν περιέχει ούτε κλάσμα ούτε λογάριθμο ούτε ρίζα), τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι (ολόκληρο) το R.

Εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης

Το σύνολο τιμών αφορά τις τιμές του ψ και (με τις μέχρι τώρα γνώσεις μας) δεν υπολογίζεται εύκολα, παρά μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις.
Με όσα έχουμε μάθει μέχρι τώρα, δύο πράγματα μπορούμε να κάνουμε ώστε να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης (το τρίτο θα το δούμε στο **Μάθημα 10)**:

1. Να **παρατηρήσουμε** (παρατηρώ = προσπαθώ να ανιχνεύσω κάποιες μόνιμες σχέσεις (π.χ. ανισότητες) που υπάρχουν στον τύπο της συνάρτησης και από αυτές να συμπεράνουμε (είτε άμεσα, είτε «χτίζοντας» τον τύπο της f) τους περιορισμούς στους οποίους υπόκειται το y. Π.χ : Αν f(x) = x^2+1, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $x^2 \geq 0$ και πάνω σε αυτή την ανίσωση να χτίσουμε την f, δηλαδή $x^2+1\geq 1$ ή $f(x)\geq 1$. Οπότε, $f(A_f)=[1,+\infty)$.

2. Να θεωρήσουμε την εξίσωση $f(x)=y$, να τη λύσουμε ως προς χ και να απαιτήσουμε το χ που βρίσκουμε να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Το σύνολο που προκύπτει από την συναλήθευση όλων των περιορισμών που παίρνουμε για το y σε όλη αυτήν τη διαδικασία, δίνουν το σύνολο τιμών της συνάρτησης. Π.χ : Αν $f(x)=\dfrac{1-x}{x+1}$ με $x\neq -1$. Θέτω
$$f(x)=y\Rightarrow \frac{1-x}{x+1}=y\Rightarrow 1-x=y(x+1)\Rightarrow 1-x=yx+y\Rightarrow yx+x=1-y\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y+1)x=1-y\Rightarrow x=\frac{1-y}{y+1}\ (y\neq -1)\ \text{και}\ x\neq -1\Rightarrow \frac{1-y}{y+1}\neq -1\Rightarrow 1-y\neq -y-1$$
που ισχύει. Τελικά έχουμε μόνο $y\neq -1$ και άρα $f(A_f)=R-\{-1\}$.

3. Με τη βοήθεια της μονοτονίας της συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της. **(Μάθημα 10)**

Παραδείγματα

1. Η $f(x)=2x^{2018}+1$ έχει σύνολο τιμών το $[1,+\infty)$, αφού ισχύει $2x^{2018}\geq 0 \Leftrightarrow 2x^{2018}+1\geq 1$ για κάθε $x\in R$.

2. Η $f(x)=2\eta\mu x-1$ έχει σύνολο τιμών το $[-3,1]$, αφού ισχύει $-1\leq \eta\mu x\leq 1\Leftrightarrow -2\leq 2\eta\mu x\leq 2\Leftrightarrow -2-1\leq 2\eta\mu x-1\leq 2-1\Leftrightarrow -3\leq 2\eta\mu x-1\leq 1\Leftrightarrow$ για κάθε $x\in R$.

3. Η $f(x)=\sqrt{4-x}$ έχει σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$, αφού ισχύει $\sqrt{4-x}\geq 0$ για κάθε $x\leq 4$.

4. Η $f(x)=\ln x$ έχει σύνολο τιμών όλο το R, όπως θυμόμαστε (λέω εγώ τώρα) από την Β’ Λυκείου.

Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ, ώστε να είναι συνάρτηση η σχέση: $f(x)=\begin{cases}-2x-\lambda^2, x\le 3\\ \lambda x-4, x\ge 3\end{cases}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι για χ = 3 η f παίρνει δύο τιμές: τις – 6 –λ^2 και 3λ – 4. Για να αποτελεί συνάρτηση η f, θα πρέπει οι παραπάνω τιμές να είναι ίσες, δηλαδή: $-6-\lambda^2=3\lambda-4 \Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ η $\lambda=-2$.

2. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές της παραμέτρου λ, ώστε να είναι συνάρτηση η σχέση: $f(x)=\begin{cases}4x+3, x\le 2\lambda^2+\lambda-1\\ x^2+7, x\ge \lambda^2+5\lambda-4\end{cases}, x\in R$

Λύση

Όπως και πιο πάνω εδώ θα απαιτήσουμε $2\lambda^2+\lambda-1\le \lambda^2+5\lambda-4 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+3\le 0 \Leftrightarrow 1\le\lambda\le 3$. Άρα λ =1, 2, 3.

Αναλυτικά τώρα έχουμε:

- Για λ = 1 είναι $f(x)=\begin{cases}4x+3, x\le 2\\ x^2+7, x\ge 2\end{cases}$, η οποία είναι συνάρτηση, αφού και από τους δύο κλάδους προκύπτει ότι f(2) = 11.
- Για λ = 2 είναι $f(x)=\begin{cases}4x+3, x\le 9\\ x^2+7, x\ge 10\end{cases}$, η οποία είναι συνάρτηση.
- Για λ = 3 είναι $f(x)=\begin{cases}4x+3, x\le 20\\ x^2+7, x\ge 20\end{cases}$, η οποία είναι **ΔΕΝ** είναι συνάρτηση αφού f(20) = 83 (από τον 1ο κλάδο) και f(20) = 407 (από τον 2ο κλάδο), **άτοπο**.

Τελικά λ =1 ή λ =2.

3. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = $\dfrac{x\ell n(x+1)}{\sqrt{x-1}}$

Λύση

Πρέπει: $\begin{cases} x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \\ x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1 \\ \sqrt{x-1}\neq 0 \Leftrightarrow x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \end{cases}$

Συναληθεύοντας τα αποτελέσματα έχουμε $A_f=(1,+\infty)$.

4. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = $\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$.

Λύση

Πρέπει να είναι: $x^2-3x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1, x\neq 2$ (οι ρίζες 1 και 2 βρίσκονται κατά τα γνωστά, με τη διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ και τον τύπο $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$),

οπότε έχουμε: $A_f=R-\{1,2\}=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$

5. Όμοια, της f(x) = $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Λύση

Πρέπει : $\begin{cases} x\neq 0 \\ 1-x^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x^2\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ \sqrt{x^2}\leq\sqrt{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ |x|\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases}$

Άρα $A_f=[-1,0)\cup(0,1]$.

6. Όμοια, της f(x) = ln(1-e^x).

Λύση

Πρέπει : 1- $e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x<0$. Άρα $A_f=(-\infty, 0)$.

7. Όμοια, της f(*x*) = $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Λύση

Πρέπει : $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ \sqrt[3]{x-1}\neq 0 \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x-1\neq 0 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\neq 1 \\ x\geq 1 \end{cases}$

Άρα A_f =(1, $+\infty$) .

8. Να βρεθεί ο ακέραιος αριθμός α, ώστε το πεδίο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2ax+1}$ να είναι το R.

Λύση

Θα πρέπει ο παρονομαστής να μην έχει ρίζες στο R, οπότε (αφού ο παρονομαστής είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο), θα πρέπει η διακρίνουσά του να είναι αρνητική. Επομένως θα έχουμε ότι:
$4a^2-4<0 \Leftrightarrow 4a^2<4 \Leftrightarrow \sqrt{4a^2}<\sqrt{4} \Leftrightarrow 2|a|<2 \Leftrightarrow |a|<1 \Leftrightarrow -1<a<1$ και αφού ο α είναι ακέραιος, θα είναι α=0.

9. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1},\quad x\in R$

Λύση

Θέτω $y=\dfrac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow yx^2-x+y=0$ το οποίο για να έχει ρίζες στο R θα πρέπει

$$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 1-4y^2\geq 0 \Rightarrow y^2\leq\frac{1}{4} \Rightarrow |y|\leq\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2} \Rightarrow f(R)=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$$

10. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=1-\sqrt{x-1}\,/[1,+\infty)$

Λύση

Θέτω

$y=1-\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=1-y \xrightarrow{y\leq 1} x-1=(1-y)^2 \Leftrightarrow x=1+(1-y)^2 \in [1,+\infty)$

$1+(1-y)^2 \geq 1 \Leftrightarrow (1-y)^2 \geq 0$ ισχύει άρα $y \leq 1 \Rightarrow f([1,+\infty))=(-\infty,1]$

11. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=x-1+\ln x/(0,+\infty)$

Λύση

Εδώ αν γνωρίζουμε τις ιδιότητες του λογαρίθμου βγάζω συμπέρασμα χωρίς πράξεις διότι :

$$\text{Αν}\ \left.\begin{array}{l} x<1 \Rightarrow \ln x<0 \Rightarrow f(x)<0 \\ x=1 \Rightarrow \ln 1=0 \Rightarrow f(1)=0 \\ x>1 \Rightarrow \ln x>0 \Rightarrow f(x)>0 \end{array}\right\} \xrightarrow{ένωση} f(0,+\infty)=R$$

12. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=x^2-4x+2$

Λύση

Είναι $A_f=R$. Θέτουμε $y=x^2-4x+2 \Rightarrow x^2-4x+(2-y)=0$. Αφού $x\in R$, θα είναι και $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 16-4\cdot(2-y)\geq 0 \Leftrightarrow 16-8+4y\geq 0 \Leftrightarrow 4y\geq -8 \Leftrightarrow y\geq -2$.
Επομένως, το σύνολο μέσα στο οποίο παίρνει τιμές η εξαρτημένη μεταβλητή y = f(x), είναι το $f(R)=[-2,+\infty)$.

13. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α της $f(x)=-x^2+6x-3$, αν το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα [2,5].

Λύση

Αρχικά, θα προσδιορίζουμε τις πραγματικές τιμές του χ, για τις οποίες είναι:

$2\leq -x^2+6x-3\leq 5 \Leftrightarrow 2\leq -x^2+6x-3$ και $-x^2+6x-3\leq 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-6x+5\leq 0$ και $x^2-6x+8\geq 0$

Η επίλυση των δύο παραπάνω ανισώσεων μας δίνει ότι

$1\leq x\leq 5$ και $x\leq 2$ η $x\geq 4$. Άρα $A_f=[1,2]\cup[4,5]$.

Ερωτήσεις τύπου «Σωστού ή Λάθους»

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ).

1. Αν $f(A_f)=(-\infty,0)$ τότε $f(x)<0, \forall x \in A$ **Σ Λ**

2. Αν $0 \in f(A_f)$ τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει μία τουλάχιστον λύση στο σύνολο Α **Σ Λ**

3. Έστω $f: A \to B$ μία συνάρτηση. Αν η f είναι ορισμένη σ'ένα σύνολο Β, τότε $f(B)=\{y \,/\, y=f(x) \text{ για καποιο } x \in A\}$ **Σ Λ**

4. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ τέτοια ώστε: $x_1=x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ **Σ Λ**

5. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ τέτοια ώστε: $x_1 \neq x_2$ με $f(x_1)=f(x_2)$ **Σ Λ**

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1. Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{x}$ είναι το :

Α. $[0,+\infty)$ Β. $(0,+\infty)$ Γ. R Δ. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

2. Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}$ είναι το :

Α) $[0,+\infty)$ Β) $[0,+\infty]$ Γ) $(0,+\infty)$ Δ) R^*

3. Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{x^2}$ είναι το :

Α) R Β) R^* Γ) $[0,+\infty)$ Δ) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

4. Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\ln x^2$ είναι το :

Α) R Β) R^* Γ) $[0,+\infty)$ Δ) $(0,+\infty)$

5. Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\frac{1}{|x|+1}$ είναι το :

Α) R^* Β) R Γ) R-$\{-1\}$ Δ) R-$\{\pm 1\}$

6. Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\frac{x}{e^x+1}$ είναι το :

Α) R-$\{-1\}$ Β) R^* Γ) R Δ) δεν οριζεται

7. Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\dfrac{x+1}{|x|-1}$ είναι το :

Α) R Β) R-$\{1\}$ Γ) R-$\{\pm 1\}$ Δ) $[0,+\infty)$

8. Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ είναι το :

Α) R Β) R^* Γ) $(0,+\infty)$ Δ) $[-\infty,+\infty]$

Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

Αντιστοιχίστε τα δεδομένα των δύο στηλών

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ	ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Α . [0,+∞)	**1 .** $f(x)=\|x\|+1$
Β . R	**2 .** $f(x)=\ln(\frac{1}{x})$
Γ . R^*	**3 .** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$
Δ . R	**4 .** $f(x)=\ln x^2$
Ε . [0,π/2)	**5 .** $f(x)=\dfrac{x}{\sigma\upsilon\nu x}$
Ζ . (0,+∞)	**6 .** $f(x)=\sqrt{25-x^2}$
Η . R	**7 .** $f(x)=e^{\sqrt{x}}$
Θ . (1,+∞)	**8 .** $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{2-\sigma\upsilon\nu x}$
Ι . [-5 , 5]	**9 .** $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{x-1}}$
Κ . R^*	**10 .** $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ,x>0\\ \sqrt{-x} & ,x<0\end{cases}$

Άλυτες Ασκήσεις

1. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις τιμές της παραμέτρου k, ώστε να είναι συνάρτηση η σχέση: $f(x)=\begin{cases}3-x, x\le 2\\ 2x^2+2-k^2, x\ge 2\end{cases}, x\in R$.

2. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις ακέραιες τιμές της παραμέτρου λ, ώστε να είναι συνάρτηση η σχέση: $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\le 2\lambda^2-3\lambda\\ 3x-1, x\ge \lambda^2+\lambda-3\end{cases}, x\in R$.

3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων

a. $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x^2-x-1}$

b. $f(x)=\dfrac{x+2}{|x|-5}$

c. $f(x)=\dfrac{x}{(x^3-1)(x+1)}$

d. $f(x)=\dfrac{1}{2\eta\mu x+4}$

e. $f(x)=\dfrac{2x}{\sigma\upsilon\nu x-1}$

f. $f(x)=\dfrac{x+1}{e^{2x}-e^x-2}$

g. $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$

h. $f(x)=\sqrt{x^4-16}$

i. $f(x)=\sqrt{x^4+4}$

j. $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x-2}-2}$

k. $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}+2}$

l. $f(x)=\sqrt{x^3-2x+1}$

m. $f(x)=\sqrt[5]{x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+3x+4}}$

n. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2-x}}$

o. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{10-|x+5|}$

p. $f(x)=\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x-2}}$
q. $f(x)=\ln(4-x^2)$
r. $f(x)=\ln\left(x^3-5x+2\right)$
s. $f(x)=\ln\left(\ln x\right)$
t. $f(x)=\log[\ln(x-2)]$
u. $f(x)=\ln(4^x+2^x-20)$
v. $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x-2)-1}$
w. $f(x)=\sqrt{\ln^2 x-\ln x}$
x. $f(x)=\log(x+3)-\log(2-x)-\log 5$
y. $f(x)=\log(x^2-1)+\log x-1+\log 2$
z. $f(x)=\log x^2-(\log x)^2$
aa. $f(x)=3^x-5^{1-2x}$
bb. $f(\chi)=2\sigma\upsilon\nu x+1$

4. Βρείτε τα σύνολα τιμών και τα ακρότατά τους αν υπάρχουν :

$a.\ f(x)=x^2$ b. $f(x)=x^3$ c. $f(x)=\eta\mu x$
$d.\ f(x)=2\sigma\upsilon\nu x$ e. $f(x)=\eta\mu^2 \mathrm{x}$ f. $f(x)=e^x$
$g.\ f(x)=2e^x\text{-}1$ h. $f(x)=\ln x$ i. $f(x)=\ln(x-1)$

5. Βρείτε τα σύνολα τιμών και τα ακρότατά τους αν υπάρχουν :

$a.\ f(x)=\eta\mu^2 x$ b. $f(x)=2+\eta\mu x$ c. $f(x)=|\eta\mu x|+2|\sigma\upsilon\nu x|$
$d.\ f(x)=\sqrt{x}+1$ e. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ f. $f(x)=e^x+3x^2+1$
$g.\ f(x)=x^2-\ln x \ \ x\in(0,1)$ h. $f(x)=x^2-2x \ \ x\in[0,2]$ i. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

6. Να βρεθούν το Π.ορισμού και το σ.τιμών της $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$.

7. Να βρεθούν τα α, β, ώστε το πεδίο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2-\alpha x+\beta}{x^2-1}$ να είναι το R.

8. Βρείτε το α ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
$f(x)=\dfrac{x^3+ax-2}{x^2-ax+a}$ $a\in R$, να είναι όλο το R .

9. Αν $f(x)=\sqrt{ax^2+ax+1}$ και η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το R, βρείτε το α.

10. Βρείτε το $\min f, \max f \quad f/R$ για να ορίζεται η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{4-f^2(x)}$.

11. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$i)f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{\left|x-1\right|-2}$ $\qquad ii)\,\mathrm{g}\left(x\right)=\dfrac{\ln\left(-x^2+3x+4\right)}{2^x-8}$

$iii)h\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x-\frac{1}{9}}}{\ln\left(x+3\right)}$ $\qquad iv)\varphi\left(x\right)=\sqrt{\pi^2-x^2}+\varepsilon\varphi x$

$v)\omega\left(x\right)=\left(\left|2x+3\right|-5\right)^{\sqrt{3-\ln x}}$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\sqrt{4-\sqrt{x-3}}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2+ax, & \text{αν } -5\le x\le -2 \\ \left|x\right|+\beta, & \text{αν } -2<x<6 \end{cases}$ για την οποία ισχύουν f(-4)=8 και f(-1)=0. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f.
β) τους αριθμούς α και β
γ) τις τιμές f(-2) και f(f(-3)) και
δ) Να λύσετε την εξίσωση f(x)=3.

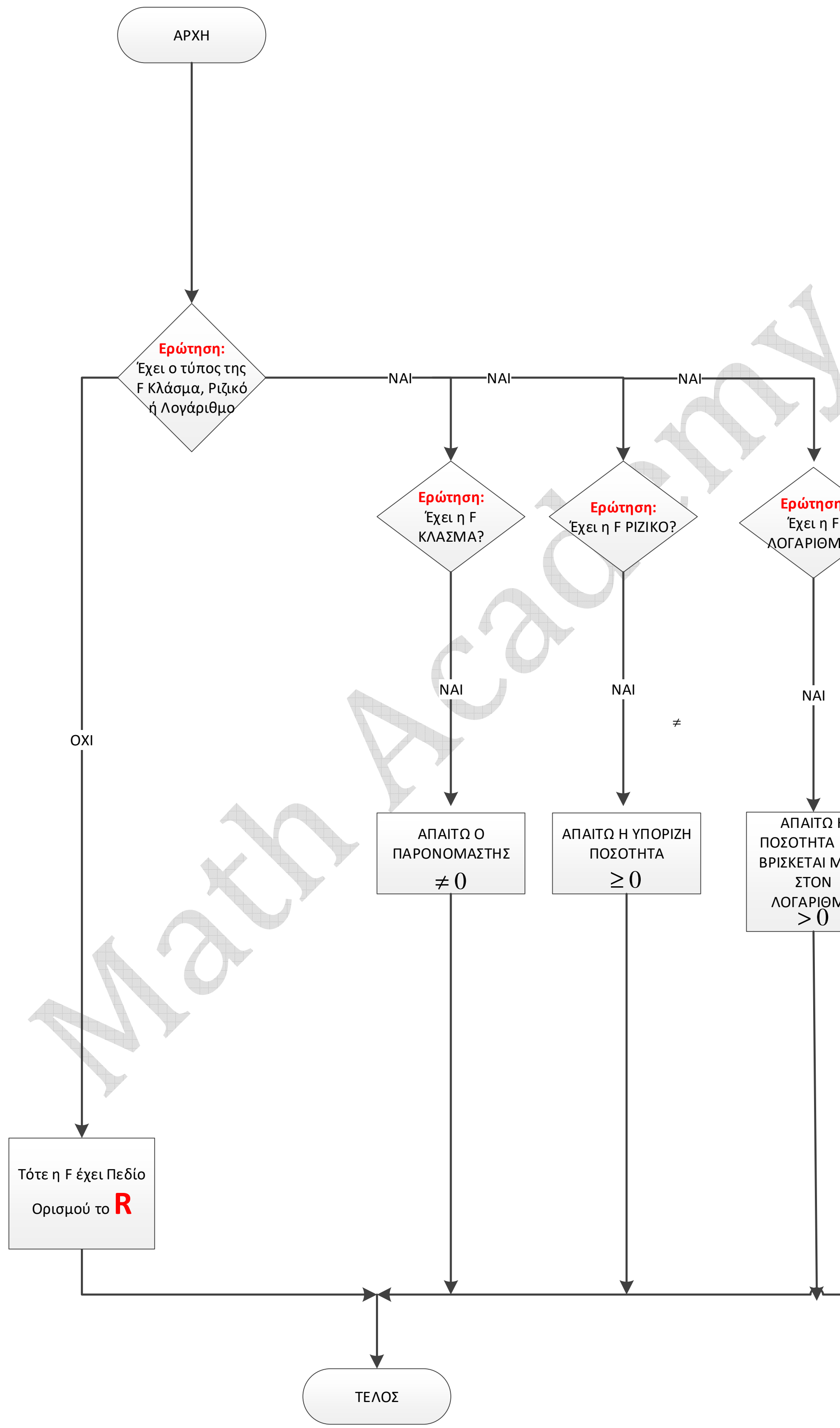
14. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathrm{R}\to R$ για την οποία ισχύει:
$f\left(x-2\right)-2f\left(4-x\right)=-x^2+12x-26, \quad \forall x\in R$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f\left(x\right)-2f\left(2-x\right)=-x^2+8x-6 \quad \forall x\in R$

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

15. Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^o$ είναι ΑΒ=6,ΒΓ=4 και ΑΔ=2. Θεωρούμε σημείο Μ της ΑΒ που απέχει χ από το σημείο Α. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του χ το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΜ και την περίμετρο του τριγώνου ΓΔΜ.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΗΣ



JUST TO BRAKE THE ICE….