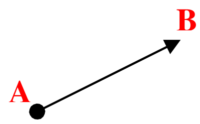
Μάθημα 1
Κεφάλαιο : Διανυσματικός Λογισμός
Θεματικές ενότητες : 1. Η έννοια του διανύσματος
2. Πράξεις διανυσμάτων

1. Η Έννοια Του Διανύσματος

➢ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Ορισμός : **Διάνυσμα** είναι το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με διατεταγμένα άκρα.



Το **Α** λέγεται **αρχή** του διανύσματος και το **Β πέρας** του διανύσματος.

Συμβολίζεται: $\vec{AB}$ (πολλές φορές και για πρακτικούς λόγους ένα διάνυσμα συμβολίζεται μόνο με ένα μικρό γράμμα: πχ. $\vec{\alpha}$:

- Επειδή δύο σημεία του επιπέδου ορίζουν μοναδική ευθεία η ευθεία αυτή ονομάζεται Φ Ο Ρ Ε Α Σ ή Δ Ι Ε Υ Θ Υ Ν Σ Η του διανύσματος ! Με άλλα λόγια **φορέας** διανύσματος (μη μηδενικού) είναι η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται αυτό το διάνυσμα.

- Επειδή το ζεύγος των σημείων είναι διατεταγμένο (δηλ.καθορίζεται η σειρά των σημείων) μας ορίζει τη Φ Ο Ρ Α !

- Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος (ΑΒ) ορίζει το Μ Ε Τ Ρ Ο του διανύσματος $\vec{AB}$ και συμβολίζεται με $\left|\vec{AB}\right|$. Προφανώς, $|\overrightarrow{AB}|\geq 0$.

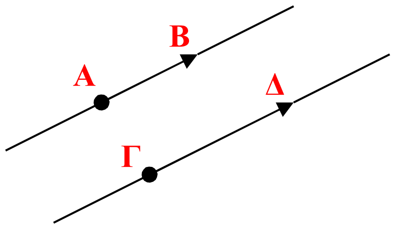
ΣΧΟΛΙΑ:

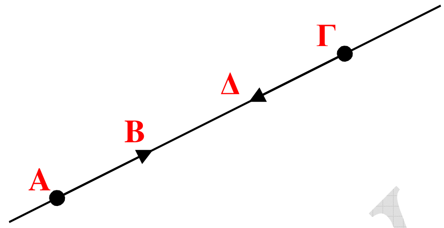
1. Αν η αρχή και το πέρας του διανύσματος συμπίπτουν τότε λέμε το διάνυσμα είναι **μηδενικό**! Γράφουμε $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ και συμβολίζουμε με $\vec{0}$ (απαραίτητο το βελάκι πάνω από το μηδέν. Καταλαβαίνουμε ότι αυτό παριστάνει ένα σημείο).

2. Αν το ευθύγραμμο τμήμα έχει μέτρο 1 τότε λέμε το διάνυσμα **μοναδιαίο** και γράφουμε $|\overrightarrow{AB}|=1$.

➢ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ Ή ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΑ

Ορισμός : Παράλληλα ή Συγγραμμικά λέγονται δύο μη μηδενικά διανύσματα όταν έχουν τον ίδιο φορέα ή οι φορείς τους είναι παράλληλες ευθείες. Αυτό σημαίνει ότι βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία ή σε παράλληλες ευθείες.



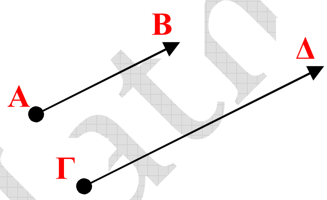


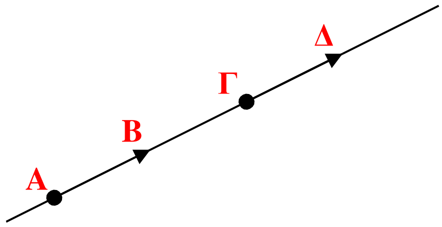
Συμβολίζουμε $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και λέμε ότι αυτά τα διανύσματα έχουν **Ιδια Διευθυνση.**

ΣΧΟΛΙΑ:

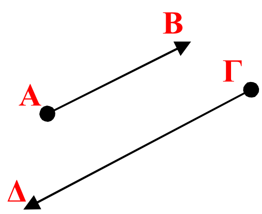
Αν έχω συγγραμμικά διανύσματα με την ίδια φορά τα λέμε **ομόρροπα**, γράφουμε $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και λέμε ότι αυτά έχουν την **ίδια κατεύθυνση**, ενώ αν έχουν αντίθετες φορές τα λέμε **αντίρροπα**, γράφουμε $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ και λέμε ότι έχουν **αντίθετη κατεύθυνση**. Πιο Αναλυτικά:

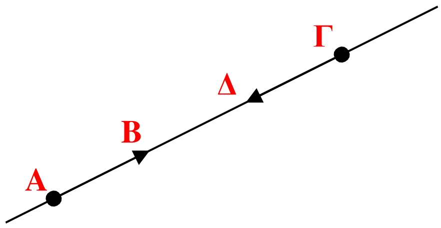
- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$





- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$



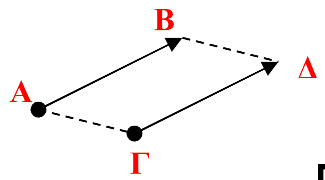


Το μηδενικό διάνυσμα δεν έχει συγκεκριμένη φορά και διεύθυνση!

Με τον όρο κατεύθυνση εννοούμε την «παραδοσιακή» φορά και διεύθυνση.

➢ ΙΣΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Ορισμός : Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ΙΣΑ** όταν έχουν ***ΙΔΙΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ*** (δηλαδή είναι ομόρροπα) και ***ΙΣΑ ΜΕΤΡΑ***.

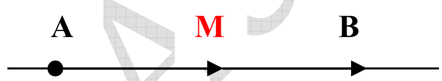


Συμβολίζουμε $\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}$ και προφανώς ισχύουν:

$$\boxed{\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}:\begin{cases}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}\\ \overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Delta}\\ \overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{\Gamma A}\end{cases}}$$

➢ ΜΕΣΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

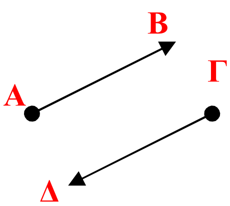
- Αν Μ μέσο του ΑΒ τότε: $\vec{AM}=\vec{MB}$ και αν $\vec{AM}=\vec{MB}$ τότε το Μ είναι το μέσο του ΑΒ



- Αν $\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}$ τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο (γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες και παράλληλες).

➢ ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ορισμός : Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται ΑΝΤΙΘΕΤΑ όταν έχουν ***ΑΝΤΙΘΕΤΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΙ ΙΣΑ ΜΕΤΡΑ***.

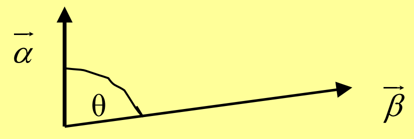


Συμβολίζουμε: $\vec{AB}=-\vec{\Gamma\Delta}$ και προφανώς ισχύει: $\boxed{\vec{AB}=-\vec{BA}}$

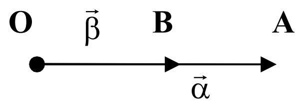
➢ ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Αν έχω δύο μη μηδενικά διανύσματα με κοινή αρχή Ο δηλ. $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$
Τη κυρτή γωνία των διευθύνσεών τους την ονομάζω γωνία των διανυσμάτων και γράφω:

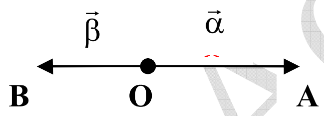
$$\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}=\theta\in[0,\pi]$$



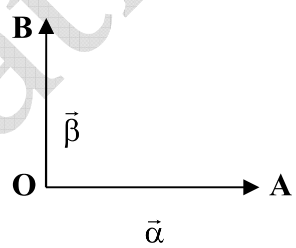
Επίσης: **i)** Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ τότε $\hat{\omega}=0$



ii) Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ τότε $\hat{\omega}=\pi$



iii) Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ τότε $\hat{\omega}=\pi/2$



ΣΧΟΛΙΑ:

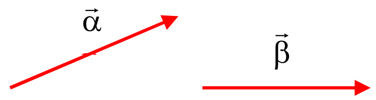
1. Αν κάποιο από τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ τότε γωνία των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία (με $0\le\omega\le\pi$).

2. Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ θεωρείται ότι είναι παράλληλο ή κάθετο με οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα.

2. Πράξεις Διανυσμάτων

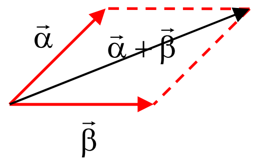
Ι. ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$



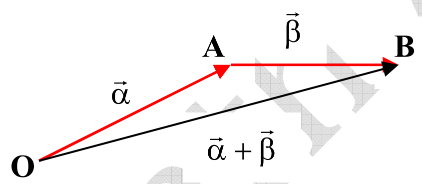
Το άθροισμα των δύο διανυσμάτων είναι και αυτό διάνυσμα και προκύπτει με ένα από τους παρακάτω τρόπους:

i)



(**κανόνας παραλληλογράμμου** – διανύσματα με κοινή αρχή)

ii)



(**κανόνας διαδοχικών διανυσμάτων**)

Βλέπουμε: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$

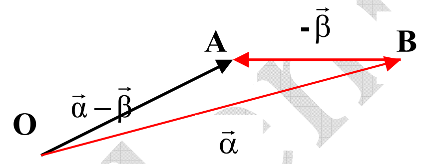
ΣΧΟΛΙΟ: Ο β΄ τρόπος μπορεί να εφαρμοστεί και για άθροισμα παραπάνω των 2 διανυσμάτων: π.χ.: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}$

ΙΙ. ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

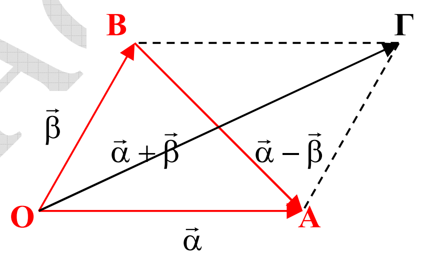
Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

Η διαφορά των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι προφανώς το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$.

Ισχύει δηλαδή $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$. Έτσι :



Παρατήρηση: Αν θέλω να δω στο ίδιο σχήμα και το άθροισμα και τη διαφορά τότε σχηματίζω το παραλληλόγραμμο :



<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ</u>

i) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

ii) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

iii) $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$ (ουδέτερο στοιχείο)

iv) $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=(-\vec{\alpha})+\vec{\alpha}=\vec{0}$ (αντίθετο στοιχείο)

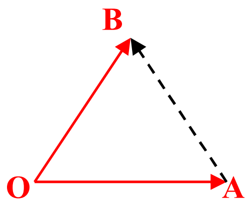
v) $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|\le|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ (τριγωνική ανισότητα)

Σχόλιο: Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

ενώ αν $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ και αντιστρόφως.

➢ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΕΩΣ

Αν Ο είναι το σημείο αναφοράς όλων των διανυσμάτων, διάνυσμα θέσης ή, διανυσματική ακτίνα του σημείου Μ ονομάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, άρα αναλύοντας ένα τυχαίο διάνυσμα θα έχω $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, (η $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$)



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

το οποίο μας δείχνει ότι κάθε διάνυσμα ισούται με την διανυσματική ακτίνα του τέλους του μείον την διανυσματική ακτίνα της αρχής του.

Γενικότερα για τυχαία σημεία του επιπέδου μπορώ να έχω :

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta E} + ...\overrightarrow{IK}$ (το τέλος του πρώτου η αρχή του επόμενου!)

Π.χ. Σε τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ δείξτε ότι $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Gamma}$

Έχω δύο τρόπους να εργασθώ :

1ος : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$

2ος : Αναλύω σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{O\Gamma}) = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O\Delta} - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Gamma}) \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0}$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ   Μ Ε   Α Π Α Ν Τ Η Σ Η

1) Για τέσσερα τυχαία σημεία Α,Β,Γ,Δ του επιπέδου να δείξετε ότι
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{A\Gamma}$.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Α΄ τρόπος (με πρόσθεση – αφαίρεση διανυσμάτων)

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{\Gamma B}$ που ισχύει.

Β΄ τρόπος (με χρήση σημείου αναφοράς)

$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Delta} + \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{A\Gamma}$

2) Δίνεται σημείο αναφοράς Ο και $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\delta}$ τα αντίστοιχα διανύσματα θέσεως των σημείων Α, Β, Γ, και Δ. Τι συμπέρασμα βγάζετε αν:

i) $\vec{\alpha}+\vec{\gamma} = \vec{\beta}+\vec{\delta}$ ii) $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}| = |\vec{\beta}-\vec{\delta}|$

<u>ΛΥΣΗ:</u>

i) $\vec{\alpha}+\vec{\gamma} = \vec{\beta}+\vec{\delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{O\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ΒΓ και ΓΔ ίσες και παράλληλες άρα είναι παραλληλόγραμμο.

ii) $\vec{\alpha}-\vec{\gamma} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma A}$

$\vec{\beta}-\vec{\delta} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{\Delta B}$

Έτσι: $|\overrightarrow{\Gamma A}| = |\overrightarrow{\Delta B}|$. Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει ίσιες διαγώνιες.

3) Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ μη μηδενικά για τα οποία ισχύουν $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = |\vec{\gamma}|$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = 5|\vec{\gamma}|$. Δείξτε ότι τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα $(\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta})$.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Έχουμε: $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = |\vec{\gamma}|$ έτσι $|\vec{\alpha}| = 3|\vec{\gamma}|$ και $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\gamma}|$. Άρα $|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 3|\vec{\gamma}| + 2|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\gamma}|$.

Αλλά επίσης $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = 5|\vec{\gamma}|$. Έτσι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, δηλαδή $(\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta})$.

4) Αν ισχύει $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{A\Lambda}=\overrightarrow{K\Lambda}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β ταυτίζονται.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

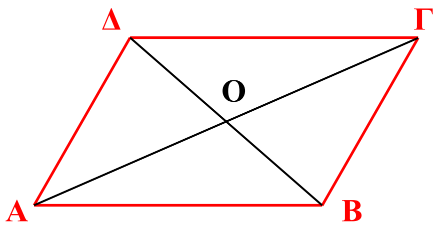
Έχουμε από την δοθείσα σχέση:

$$\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{A\Lambda}=\overrightarrow{K\Lambda} \Leftrightarrow \overrightarrow{KB}-\overrightarrow{K\Lambda}=-\overrightarrow{A\Lambda} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Lambda B}=\overrightarrow{\Lambda A} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Lambda B}-\overrightarrow{\Lambda A}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Lambda B}+\overrightarrow{A\Lambda}=\vec{0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Lambda}+\overrightarrow{\Lambda B}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

το οποίο μας λέει ότι τα σημεία Α, Β ταυτίζονται.

5) Παίρνουμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.
Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

i) $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ **ii)** $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}$ **iii)** $\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{O\Gamma}$ **iv)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{O\Delta}$ **v)** $\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}$



i) $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$

ii) $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

iii) $\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma O}=\overrightarrow{BO}$

iv) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{O\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$

v) $\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta}=\vec{0}$

6) Έστω τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν. Βρείτε σημείο Ρ τέτοιο ώστε:
$\overrightarrow{\Lambda P}+\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{\Lambda N}-\overrightarrow{MN}$

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Έχουμε διαδοχικά:

$$\overrightarrow{\Lambda P}+\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{\Lambda N}-\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Lambda P}-\overrightarrow{\Lambda N}=-\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{NP}=-\left(\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{MN}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{NP}=-\overrightarrow{KN} \Leftrightarrow \overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NK}$$

Άρα το Ρ ταυτίζεται με το Κ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το σωστό(Σ) ή λάθος(Λ).

1. Τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AM}$ είναι διαδοχικά. Σ☐ Λ☐
2. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα, τότε έχουν την ίδια διεύθυνση. Σ☐ Λ☐
3. $\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{A\Gamma}$ Σ☐ Λ☐
4. $\vec{\alpha}=\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ Σ☐ Λ☐
5. $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ Σ☐ Λ☐
6. Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=0$ τότε τα διανύσματα είναι αντίθετα. Σ☐ Λ☐

Β. ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

Αντιστοιχίστε τα στοιχεία της στήλης (Α) με τα στοιχεία της στήλης (Β).

ΣΤΗΛΗ (Α)	**ΣΤΗΛΗ (Β)**
1. $\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{BA}$	**Α.** $\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}$
2. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$	**Β.** $\vec{0}$
3. $\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\rvert$	**Γ.** $\overrightarrow{A\Gamma}$
4. $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	**Δ.** $\overrightarrow{AB}$
5. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$	**Ε.** $\lvert\overrightarrow{BA}\rvert$
6. $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert+\lvert\overrightarrow{BA}\rvert$	**Ζ.** (3, -1)
7. $\lvert\vec{\alpha}+\vec{\beta}\rvert=\lvert\vec{\alpha}\rvert+\lvert\vec{\beta}\rvert,\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$	**Η.** $\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$
8. $\lvert\vec{\alpha}+\vec{\beta}\rvert=\lvert\vec{\alpha}\rvert+\lvert\vec{\beta}\rvert,\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$	**Θ.** 0
	Ι. $2\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$

Α Λ Υ Τ Ε Σ   Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$ οι αντίστοιχες διανυσματικές ακτίνες των σημείων Α , Β , Γ , Δ τι συμπεράσματα βγάζετε για το ΑΒΓΔ αν ισχύουν

(1) $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|$ (2) $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta}$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|$

2. Αν για δύο τρίγωνα ΑΒΓ , ΑΔΕ ισχύει $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AE}$ να δείξετε ότι το ΒΔΓΕ είναι παραλ/μο

3. Δίνονται τα σημεία Α, Β Γ , Δ και Ο το μέσο του ΑΓ. Δείξτε ότι ισχύει $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

4. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ και $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta}$ να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

5. Δίνονται τα παραλ/μα ΑΒΓΔ και ΑΒΓ΄Δ΄ .Δείξτε ότι και το ΔΓΓ΄Δ΄ παραλ/μο.

6. Δίνονται τα σημεία Α , Β , Γ , Δ .Να συγκριθούν τα διανύσματα $\vec{\chi}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ και $\vec{\psi}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta B}$ (δημιουργήστε τη διαφορά)

7. Αν για τα σημεία ισχύει η σχέση : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{\Gamma\Lambda}$ να δείξετε ότι τα σημεία Κ , Λ ταυτίζονται .

8. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ , Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ , ΒΓ αντίστοιχα .Δείξτε ότι $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{N\Gamma}$

9. Αν για τα σημεία Α , Β , Γ ισχύει ότι $2|\overrightarrow{AB}|=3|\overrightarrow{B\Gamma}|=6|\overrightarrow{A\Gamma}|$ δειξτε ότι τα σημεία Α , Β , Γ είναι συνευθειακά .

10. Δίνονται τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν τέτοια ώστε: $\overrightarrow{K\Lambda}-\overrightarrow{N\Lambda}=\overrightarrow{NM}-\overrightarrow{KM}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Ν ταυτίζονται.

11. Αν ΑΒΓ τυχαίο τρίγωνο να δείξετε ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}=\vec{0}$.

12. Δίνονται τα σημεία Α,Β,Γ, και τα σημεία Δ,Ε τέτοια ώστε $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι το Α είναι μέσο του ΔΕ.

13. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Υπολογίστε τις γωνίες:

i) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)$ ii) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}\right)$ iii) $\left(\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{B\Gamma}\right)$ iv) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Delta}\right)$

14. Υπολογίστε τα αθροίσματα:

i) $\overrightarrow{\Lambda N}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{NM}$

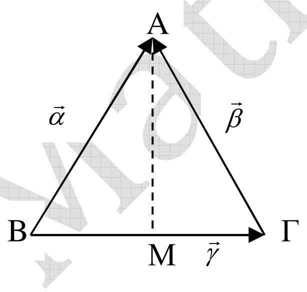
ii) $\overrightarrow{KI}-\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{\Lambda M}$

iii) $\overrightarrow{\Lambda M}-\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{\Lambda O}$

iv) $\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{BN}$

v) $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{A\Lambda}-\overrightarrow{K\Lambda}-\overrightarrow{AK}$

15. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. $\overrightarrow{BA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\Gamma A}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\gamma}$



Συμπληρώστε τα κενά:

i) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=$

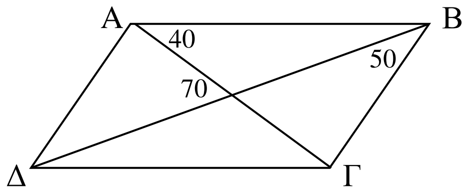
ii) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{\Gamma M}=$

iii) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{A\Gamma}=$

iv) $\left(\vec{\beta},-\vec{\alpha}\right)=$

v) $\left(\overrightarrow{MA},-\vec{\beta}\right)$

16. Συμπληρώστε τα κενά: με το ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο



i) $\left(\overrightarrow{\Gamma A}, \overrightarrow{AB}\right) =$

ii) $\left(\overrightarrow{\Delta\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma B}\right) =$

iii) $\overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} =$

iv) $\overrightarrow{\Delta O} + ... = \vec{O}$

v) $\overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{A\Delta} =$

17. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Να αποδείξετε ότι:
$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\Gamma Z} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

18. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{Z\Gamma}$.
Να δείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

19. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ τυχαίο σημείο. Να δείξετε ότι:
i) $\overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{\Gamma K}$ ii) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{\Gamma K} = \overrightarrow{\Delta K} + \overrightarrow{BK}$

20. Αν $|\vec{\alpha}| = 1$ και $|\vec{\beta}| = 4$, να αποδείξετε ότι: $3 \le |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \le 5$