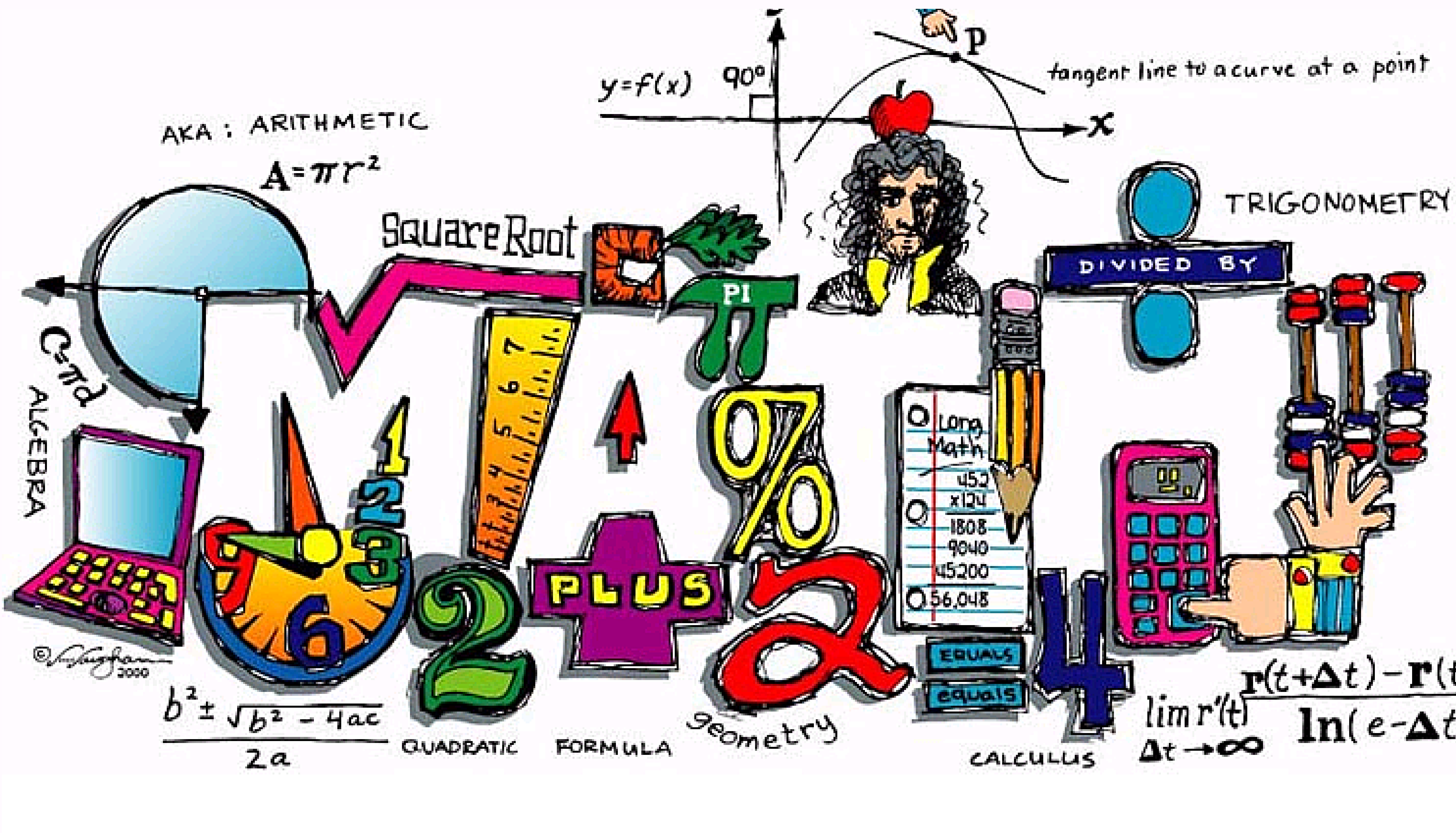
Math Academy



Μαθηματικά Γ΄Γυμνασίου

Μαρίνος Παπαδόπουλος

ΠΡΟΛΟΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Σας καλωσορίζω στον όμορφο κόσμο των Μαθηματικών της Γ' Γυμνασίου. Τα μαθηματικά της συγκεκριμένης τάξης αποτελούν ίσως το αποκορύφωμα των μαθηματικών του γυμνασίου. Οι απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις για να συνεχίσετε στο Λύκειο με αξιώσεις βρίσκονται μέσα σε αυτό το βοήθημα και για το λόγω αυτό θα σας παρακαλέσω να του αποδώσετε τον απαραίτητο σεβασμό. (Δηλαδή μη μπείτε στη διαδικασία να το βανδαλίσετε…έτσι παιδάκια;;;)

Από τη δικιά μου μεριά θα προσπαθήσω να σας μεταλαμπαδεύσω τα περιεχόμενα του βιβλίου που κρατάτε στα χέρια σας με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Από τη δικιά σας μεριά απαιτώ να με βοηθήσετε στη προσπάθεια αυτή γιατί στη γνώση το ταξίδι είναι ομαδικό. Ελάτε να διασκεδάσουμε…!!!

Τέλος θα ήθελα να αφιερώσω όλη αυτή τη προσπάθεια στους γονείς μου οι οποίοι δουλεύοντας ατελείωτες ώρες, θυσίασαν την προσωπική τους ζωή για τα παιδιά τους.

Καλή σχολική χρονιά!

Παπαδόπουλος Μαρίνος - Μαθηματικός

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α

ΑΛΓΕΒΡΑ

Math Academy

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (ΜΕΡΟΣ Α΄: ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°

Αλγεβρικές Παραστάσεις

ΜΑΘΗΜΑ 1

Κεφάλαιο 1ο : Αλγεβρικές Παραστάσεις

Υποενότητα 1.1: Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (Επαναλήψεις-Συμπληρώσεις)

Θεματικές Ενότητες:

1. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους.
2. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών.
3. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού.

Α. ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΟΥΣ

➢ ΟΡΙΣΜΟΙ

✓ Το σύνολο των **πραγματικών αριθμών** ($\mathbb{R}$) αποτελείται από τους ρητούς αριθμούς και τους άρρητους.

✓ Ένας αριθμός λέγεται ***ρητός*** όταν έχει ή μπορεί να πάρει κλασματική μορφή, δηλαδή όταν
π.χ: $4=\frac{8}{2}$, $2,5=\frac{5}{2}$, $8,5=\frac{85}{10}$, $3,\overline{03}=\frac{300}{99}$

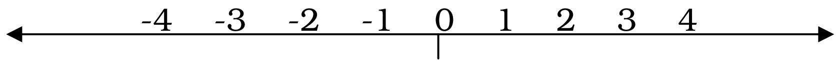
- Θυμίζουμε ότι κάθε ρητός μπορεί να γραφεί είτε ως δεκαδικός είτε ως περιοδικός δεκαδικός και αντίστροφα.

✓ Ένας αριθμός λέγεται ***άρρητος*** όταν **δε** μπορεί να πάρει κλασματική μορφή.
π.χ: $\sqrt{2}=1,41421356....$, $\pi=3,1415.....$

- Θυμίζουμε ότι κάθε άρρητος δε μπορεί να γραφεί ούτε ως δεκαδικός, ούτε ως περιοδικός δεκαδικός.

✓ Κάθε πραγματικός αριθμός παριστάνεται (απεικονίζεται) με ένα σημείο πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

- Θυμίζουμε ότι οι **φυσικοί αριθμοί** είναι το σύνολο: $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ ενώ οι **ακέραιοι αριθμοί** είναι το σύνολο: $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$.



✓ ***Αντίθετοι*** λέγονται οι αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν, όπως ο α και ο –α αφού

$$\alpha+(-\alpha)=0$$

✓ ***Αντίθετος*** ενός αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των αντιθέτων των προσθετέων, δηλαδή

$$-(\alpha+\beta)=-\alpha-\beta$$

✓ ***Λόγος*** δύο αριθμών (ή παραστάσεων) ονομάζουμε το πηλίκο της διαίρεσής τους, δηλαδή $\alpha:\beta=\dfrac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\dfrac{1}{\beta}$ με $\beta\neq 0$ (*λογικό αφού διαίρεση με διαιρέτη 0 δεν ορίζεται…!!!*)

✓ ***Αντίστροφοι*** λέγονται οι αριθμοί που έχουν γινόμενο τη μονάδα, όπως ο α και ο $\dfrac{1}{\alpha}$ αφού $\alpha\cdot\dfrac{1}{\alpha}=1$ (προφανώς ο α = 0 δεν έχει αντίστοφο…Γιατι…?)

✓ ***Άρτιος*** λέγεται κάθε ακέραιος αριθμός που διαιρείται με το 2. Είναι οι γνωστοί μας ζυγοί από το δημοτικό δηλαδή το 0, 2, 4, 6, 8, 10, …….

- Συμβολικά κάθε άρτιος έχει τη μορφή $2\cdot\nu$, όπου ν ακέραιος.

✓ ***Περιττός*** λέγεται κάθε ακέραιος αριθμός που **δε** διαιρείται με το 2. Είναι οι γνωστοί μας μονοί από το δημοτικό δηλαδή το 1, 3, 5, 7, 9,….

- Συμβολικά κάθε περιττός έχει τη μορφή $2\cdot\nu+1$, όπου ν ακέραιος.

✓ ***Απόλυτη τιμή*** ενός αριθμού ορίζεται ως η απόσταση του αριθμού αυτού πάνω στον άξονα από την αρχή Ο και είναι *πάντα θετικός αριθμός ή μηδέν*. Πιο αναλυτικά είναι:

- $|\alpha|=\alpha$ αν $\alpha\geq 0$
- $|\alpha|=-\alpha$ αν $\alpha<0$

✓ Η **απόσταση** δυο σημείων Α, Β είναι: $AB=|\alpha-\beta|$.

➢ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

✓ **Για να προσθέσουμε δύο αριθμούς ακολουθούμε την εξής διαδικασία:**

- Αν οι αριθμοί είναι **ομόσημοι** (*δηλαδή έχουν το ίδιο πρόσημο*) αρκεί να προσθέσουμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών (δηλαδή τους αριθμούς σκέτους χωρίς πρόσημο) και στο αποτέλεσμα να βάλουμε το πρόσημο που επικρατεί.

  π.χ: $+3+4=+7$ και $-3-4=-7$

- Αν οι αριθμοί είναι **ετερόσημοι** (*δηλαδή έχουν διαφορετικό πρόσημο*) αρκεί να αφαιρέσουμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών (δηλαδή τους αριθμούς σκέτους χωρίς πρόσημο) και στο αποτέλεσμα να βάλουμε το πρόσημο του μεγαλύτερου αριθμού.

  π.χ: $+3-4=-1$ και $-3+4=+1$

✓ **Για να πολλαπλασιάσουμε δύο αριθμούς ακολουθούμε την εξής διαδικασία:**

- Αν οι αριθμοί είναι **ομόσημοι** (δηλαδή έχουν το ίδιο πρόσημο) πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών (δηλαδή τους αριθμούς σκέτους χωρίς πρόσημο) και στο αποτέλεσμα να βάλουμε το πρόσημο **(+)**.

  π.χ: $(+3)\cdot(+4)=+12$ και $(-3)\cdot(-4)=+12$

- Αν οι αριθμοί είναι **ετερόσημοι** (δηλαδή έχουν διαφορετικό πρόσημο)πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών (δηλαδή τους αριθμούς σκέτους χωρίς πρόσημο) και στο αποτέλεσμα να βάλουμε το πρόσημο **(-)**.

  π.χ: $(+3)\cdot(-4)=-12$ και $(-3)\cdot(+4)=-12$

(*) Γενικά όσον αναφορά τα πρόσημα του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης έχουμε:

$$\begin{array}{l} (+)\cdot(+)=(+) \\ (-)\cdot(-)=(+) \\ (+)\cdot(-)=(-) \\ (-)\cdot(+)=(-) \end{array} \quad \text{και όμοια για τη διαίρεση} \quad \begin{array}{l} (+):(+)=(+) \\ (-):(-)=(+) \\ (+):(-)=(-) \\ (-):(+)=(-) \end{array}$$

✓ **Για να κάνουμε πράξεις σε μια παράσταση ακολουθούμε την εξής προτεραιότητα πράξεων:**

- Αν οι παράσταση έχει παρενθέσεις τότε κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την εξής σειρά:
  (i) Πολλαπλασιασμούς-Διαιρέσεις
  (ii) Προσθέσεις-Αφαιρέσεις

- Μόλις τελειώσουμε με τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις ακολουθούμε πάλι την ίδια σειρά, δηλαδή:
  (i) Πολλαπλασιασμούς-Διαιρέσεις
  (ii) Προσθέσεις-Αφαιρέσεις

✓ **Για να απαλείψουμε παρενθέσεις ακολουθούμε την εξής διαδικασία.**

- Αν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει το πρόσημο **(+)** , τότε παραλείπουμε το πρόσημο αυτό και την παρένθεση γράφοντας τους όρους της όπως είναι.

  π.χ $+(5-3+9)=+5-3+9$

- Αν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει το πρόσημο **(-)** , τότε παραλείπουμε το πρόσημο αυτό και την παρένθεση γράφοντας τους όρους της με αντίθετα πρόσημα.

  π.χ $-(13-5+9-7+3)=-13+5-9+7-3$

- Αν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει **αριθμός**, τότε εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

  π.χ $2\cdot(x-3)=2\cdot x-2\cdot 3=2x-6$

➢ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

✓ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ

(i) **Αντιμεταθετική** Ιδιότητα: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
(ii) **Προσεταιριστική** Ιδιότητα: $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$
(iii) Ιδιότητα **Ουδετέρου:** $\alpha+0=\alpha$
(iv) Ιδιότητα **Αντιθέτου:** $\alpha+(-\alpha)=0$

ΘΥΜΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ:

(*) Για να προσθέσουμε δύο κλάσματα διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις

(i) Όταν τα κλάσματα είναι ομώνυμα (δηλαδή έχουν τους ίδιους παρονομαστές), ισχύει:
$$\frac{\alpha}{\gamma} \pm \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \pm \beta}{\gamma}, \gamma \neq 0$$

(ii) Όταν τα κλάσματα είναι ετερώνυμα (δηλαδή έχουν διαφορετικούς παρονομαστές), βρίσκω το Ε.Κ.Π των παρονομαστών, τα μετατρέπω σε ομώνυμα (με τη γνωστή σε όλους μας διαδικασία με τα καπελάκια) και εφαρμόζω τη παραπάνω διαδικασία, δηλαδή:
$$\frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} \pm \frac{\beta\gamma}{\beta\delta} = \frac{\alpha\delta \pm \beta\gamma}{\beta\delta}, \beta, \delta \neq 0$$

✓ **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ**

(i) **Αντιμεταθετική** Ιδιότητα: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

(ii) **Προσεταιριστική** Ιδιότητα: $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

(iii) Ιδιότητα **Ουδετέρου:** $\alpha \cdot 1 = \alpha$

(iv) Ιδιότητα **Αντιστρόφου:** $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$

(v) $\alpha \cdot 0 = 0$ **και** $\frac{0}{\alpha} = 0, \alpha \neq 0$

ΘΥΜΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ:

(*) Για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα δεν μας ενδιαφέρει αν είναι ομώνυμα. Άπλα πολλ\ζουμε τους αριθμητές και τους παρονομαστές μεταξύ τους. Δηλαδή θα ισχύει:
$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}, \beta, \delta \neq 0$ ή $\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}, \gamma \neq 0$ αν έχουμε να πολλ\σουμε αριθμό με κλάσμα.

(**) Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα, αρκεί να αντιστρέψω τους όρους του δεύτερου κλάσματος και να κάνω πολλαπλασιασμό. Δηλαδή θα ισχύει:
$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}, \beta, \gamma, \delta \neq 0$$

(***)Για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ισχύουν αντίστοιχα:

$\alpha \cdot 0 = 0$

$\alpha \cdot 1 = \alpha$

$\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$

προσοχη: αλλο το $\alpha + \alpha = 2\alpha$

ενώ για τη διαίρεση

$\alpha : 0 =$ ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ

$0 : \alpha = 0$

$\alpha : 1 = \alpha$

$\alpha : \alpha = 1$

✓ Ιδιοτητα Συνδεσης Προσθεσης-Πολλαπλασιασμου

(i) **Επιμεριστική** Ιδιότητα**:** $\alpha(\beta \pm \gamma) = \alpha\beta \pm \alpha\gamma$

(ii) **Διπλή Επιμεριστική** Ιδιότητα: $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

✓ Γενικες Ιδιοτητες

(i) Ένα γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν όταν **ή** ο ένας **ή** ο άλλος ή και ακόμα και οι δύο παράγοντες του γινομένου είναι ίσοι με το 0, δηλαδή: $\boxed{\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \ \textbf{ή} \ \beta = 0}$

(ii) Ένα γινόμενο είναι διάφορο του μηδενός όταν **και** οι δύο παράγοντες του γινομένου δεν είναι μηδέν, δηλαδή: $\boxed{\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \ \textbf{και} \ \beta \neq 0}$

(*) Για όλες τις παραπάνω Ιδιότητες θεωρούμε τα α, β, γ ως πραγματικοί αριθμοί

➢ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις

(i) $7-(2-3+7)-2\cdot[6-3\cdot(-2+4)]$

(ii) $1-\left(\frac{8}{3}-1\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)+3:\left(-\frac{2}{5}\right)$

(iii) $1-\dfrac{2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{2-\frac{7}{2}}$

Λύση.

Μεθοδολογία

Για να κάνουμε πράξεις σε μια παράσταση ακολουθούμε την εξής προτεραιότητα πράξεων:

- Αν οι παράσταση έχει παρενθέσεις τότε κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την εξής σειρά:
  (i) Πολλαπλασιασμούς-Διαιρέσεις
  (ii) Προσθέσεις-Αφαιρέσεις

- Μόλις τελειώσουμε με τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις ακολουθούμε πάλι την ίδια σειρά, δηλαδή:
  (i) Πολλαπλασιασμούς-Διαιρέσεις
  (ii) Προσθέσεις-Αφαιρέσεις

(i) Σύμφωνα με την προτεραιότητα πράξεων έχουμε:

$$7-(2-3+7)-2\cdot[6-3\cdot(-2+4)]=$$
$$=7-(2-3+7)-2\cdot(6-3\cdot2)=$$
$$=7-(2-3+7)-2\cdot(6-6)=$$
$$=7-6-2\cdot0=$$
$$=7-6=$$
$$=1$$

(ii) Όμοια έχουμε:

$$1-\left(\frac{8}{3}-1\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)+3:\left(-\frac{2}{5}\right)=$$
$$=1-\left(\frac{8}{3}-\frac{3}{3}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)+3:\left(-\frac{2}{5}\right)=$$
$$=1-\left(\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)+3:\left(-\frac{2}{5}\right)=$$
$$=1+\frac{35}{6}-3\cdot\frac{5}{2}=$$
$$=1+\frac{35}{6}-\frac{15}{2}=$$
$$=\frac{6}{6}+\frac{35}{6}-\frac{45}{6}=$$
$$=\frac{6+35-45}{6}=$$
$$=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$

(iii) $$1-\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{2-\frac{7}{2}}=1-\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{2}-\frac{7}{2}}=1-\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{3}{2}}=1-\frac{4}{9}=\frac{9}{9}-\frac{4}{9}=\frac{9-4}{9}=\frac{5}{9}$$

2. Αν $\alpha+\beta=-1$ να υπολογιστεί η τιμή της παρακάτω παράστασης:
$\alpha-\beta(-2+13)-2\cdot(\alpha-5\beta)-5$

Λύση.

$$\alpha-\beta(-2+13)-2\cdot(\alpha-5\beta)-5=$$
$$=\alpha-\beta\cdot 11-2\alpha+10\beta-5=$$
$$=\alpha-2\alpha-11\beta+10\beta-5=$$
$$=-\alpha-\beta-5=$$
$$=-(\alpha+\beta)-5=$$
$$=-(-1)-5=$$
$$=1-5=$$
$$=-4$$

3. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

(i) $6+\alpha(3-5)-2\cdot(3-\alpha)=0$

(ii) $\alpha-2-(\beta-5)-3(\alpha-\beta)=1+2(\beta-\alpha+1)$

Λύση.

Μεθοδολογία

Μια ισότητα Α=Β μπορεί να αποδειχθεί με δυο τρόπους:

1ος Τρόπος

Παίρνουμε το πιο σύνθετο μέλος της ισότητας, κάνουμε τις πράξεις και καταλήγουμε στο άλλο μέρος

2ος Τρόπος

Αν και τα δύο μέλη της ισότητας είναι σύνθετα, τότε τα δουλεύουμε ταυτόχρονα(κάνοντας πράξεις) και καταλήγουμε στην ίδια παράσταση.

(i) $6+\alpha(3-5)-2\cdot(3-\alpha)=6+\alpha(-2)-6+2\alpha=6-2\alpha-6+2\alpha=6-6+2\alpha-2\alpha=0$

(ii)

$$\begin{aligned}
&\alpha-2-(\beta-5)-3(\alpha-\beta)=1+2(\beta-\alpha+1)\\
&\alpha-2-\beta+5-3\alpha+3\beta=1+2\beta-2\alpha+2\\
&\alpha-3\alpha-\beta+3\beta-2+5=1+2-2\alpha+2\beta\\
&-2\alpha+2\beta+3=-2\alpha+2\beta+3
\end{aligned}$$

4. Να υπολογίσετε τη παράσταση: $A=\dfrac{-[2-(3+x)]-(-x+4)+2(5-x)}{\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-3+\frac{1}{2}\right)}$

και να δείξετε ότι είναι ανεξάρτητη από τη μεταβλητή x.

Λύση.

$$A=\frac{-[2-(3+x)]-(-x+4)+2(5-x)}{\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-3+\frac{1}{2}\right)}=\frac{-(2-3-x)+x-4+10-2x}{\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{6}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{-2+3+x+x-4+10-2x}{\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}=\frac{-2-4+3+10}{1}=7$$

➢ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ « ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΣ»

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ).

1. Ο αριθμός -4 δεν είναι άρτιος **Σ** ☐ **Λ** ☐

2. Ο αριθμός -7 είναι περιττός **Σ** ☐ **Λ** ☐

3. Ο αριθμός 0 είναι άρτιος **Σ** ☐ **Λ** ☐

4. Κάθε ακέραιος αριθμός είναι ρητός **Σ** ☐ **Λ** ☐

5. Κάθε ακέραιος αριθμός είναι φυσικός **Σ** ☐ **Λ** ☐

6. Όλοι οι αριθμοί έχουν αντίστροφο **Σ** ☐ **Λ** ☐

7. Ο αριθμός –α είναι αρνητικός αριθμός **Σ** ☐ **Λ** ☐

8. Αν δύο αριθμοί είναι αντίθετοι, τότε το γινόμενο τους είναι αρνητικός **Σ** ☐ **Λ** ☐

9. Αν δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι, τότε είναι ομόσημοι **Σ** ☐ **Λ** ☐

10. Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές **Σ** ☐ **Λ** ☐

11. Το πρόσημο του πηλίκου δύο αριθμών είναι το ίδιο με το πρόσημο του γινομένου τους. **Σ** ☐ **Λ** ☐

12. Αν το άθροισμα δύο αριθμών είναι αρνητικός αριθμός και το πηλίκο τους θετικός αριθμός, τότε οι αριθμοί είναι αρνητικοί. **Σ** ☐ **Λ** ☐

➢ Ερωτησεις Πολλαπλης Επιλογης

1. Ποια από τις παρακάτω ισότητες εκφράζει την προσεταιριστική ιδιότητα ;

Α. $2\alpha\beta = 2\beta\alpha$ **Β.** $\frac{3\alpha+6}{3} = \alpha+2$ **Γ.** $\frac{2\alpha}{\beta}+\gamma = \gamma+\frac{2\alpha}{\beta}$ **Δ.** $(2\alpha+5)+\beta = 2\alpha+(5+\beta)$

2. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, ποια από τις παρακάτω ιδιότητες εκφράζει η ισότητα : $\alpha(\beta+\gamma)=(\beta+\gamma)\alpha$;

Α. Την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης;
Β. Την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού;
Γ. Την προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης;
Δ. Την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση;

3. Αν α , β πραγματικοί, μη μηδενικοί και αντίθετοι, τότε η τιμή του λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ιση με :

Α. 1 **Β.** 0 **Γ.** -1 **Δ.** Τίποτα από τα προηγούμενα

4. Αν α , β πραγματικοί αριθμοί, ώστε α + β =0. Τότε θα είναι :
Α. α = β **Β.** α = β = 0 **Γ.** α = β = 0 ή α, β ετερόσημοι **Δ.** δεν προκύπτει συμπέρασμα

➢ Ερωτησεις Συμπληρωσης Κενου

1. Να συμπληρώσετε οι παρακάτω πίνακες:

α.

Αριθμός	2	-3	$-\frac{2}{3}$	1,5	0,3333…	$2,\overline{75}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{9}$	π
Φυσικός									
Ακέραιος									
Ρητός									
Άρρητος									

β.

Αριθμός	-2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1
Αντίθετος					
Αντίστροφος					

2. Να συμπληρώσετε τις ισότητες :

Να συμπληρωθούν τα κενά:		
$-5-7=$...............	$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=$.......	$2(x-3)=$.........
$3-5=$.............	$-\frac{10}{-6}=$......	$-3\cdot(2x-1)=$...........
$-2+2=$................	$\frac{0}{15-73}=$.......	$-5(x+...)=......+10$
$-3\cdot(-5)=$................	$\left(-\frac{5}{2}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)=$.....	$-3\cdot(....-....)=3x-6$
$-2\cdot(+3)=$................		
$0\cdot(-5)=$....................		
$-3\cdot\frac{2}{5}=$..................		
$-5\cdot\frac{1}{5}=$............		

➢ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\text{i)}A=\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-1\right)-\left(-\frac{7}{8}+1-\frac{2}{5}\right)-\left(-4+\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{ii)}B=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):(-2)-\left(3+\frac{3}{4}\right):\left(-3+\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{iii)}\Gamma=\frac{\left(\frac{3}{2}-1\right)}{1+\frac{3}{2}}-\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right):(-3)}{\left(\frac{1}{3}+1\right):(-4)}-(-2):\frac{1}{3}$$

$$\text{iv)}\Delta=\left(1-\frac{1}{4}\right):\left(\frac{1}{2}-1\right)-\frac{\frac{3}{4}:\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

2. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $-\{-2x-[3y-(2x-3y)+(3x-2y)]+2x\}$

β) $x-\{y+[x-(y+\alpha)]\}$

γ) $[\alpha-(\beta-\gamma)]+[\beta-(\gamma-\alpha)]-[\gamma-(\alpha-\beta)]$

δ) $-\{\alpha-[\beta-(\gamma-\alpha)]\}-\{\beta-[\gamma-(\alpha-\beta)]\}$

3. Αν $\alpha+\beta=3$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$A=-\{\alpha+[-2-(-\beta+3)+7+\gamma]-(\gamma+2)\}$

4. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί, να βρείτε το άθροισμα $A=(2\alpha-3\gamma+\beta)-(\alpha-3\beta+2\gamma)+(4\alpha-\beta)$ και έπειτα αν $\alpha=-\frac{1}{10}$, $\beta=\frac{1}{6}$ και $\gamma=-\frac{1}{15}$ να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης Α.

5. Να πολλαπλασιάσετε με -1 την παράσταση $\alpha-(\beta-\gamma)$ και το γινόμενο αυτό να το αφαιρέσετε από την παράσταση $\alpha-\beta-\gamma$. Στη συνέχεια να βρείτε τον αντίθετο της παραπάνω διαφοράς,

6. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $1+(\kappa-\lambda)-(\kappa-2-\lambda)=3$

β) $1-3(x-2y)+2(1-3y)-3(1-x)=0$

γ) $\alpha-\beta(2-3)-2(3\beta-\alpha)=2-(5\beta+2)-3(-\alpha)$

7. Αν $x=-|5-3|$ και $y=-|1-2|$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

a) $K=1+3x-5y-2xy$

β) $\Lambda=1-5(x-3y)+\frac{x}{y}$

8. Αν $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha\beta-1)=0$, να δείξετε ότι οι α,β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι.

9. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A=2x-3\cdot[x-(2x-y)]-y$ και μετά να βρείτε την τιμή της, για $x=0,2$ και $y=0,25$.

10. Αν $a+\beta=-2$ και $\beta-\gamma=5$, να υπολογίσετε την παράσταση

$A=-5\gamma-8(2-\beta)-3(\beta-\gamma)+3\alpha$

Β. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

➢ ΟΡΙΣΜΟΙ

- ✓ **Δύναμη** με βάση ένα πραγματικό αριθμό α και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό ν με $\nu \geq 2$, που συμβολίζεται με α^{ν}, λέμε το γινόμενο ν παραγόντων ίσω με τον αριθμό α. Δηλαδή

$$\underbrace{\alpha}_{\beta\alpha\sigma\eta}{}^{\overbrace{\nu}^{\text{Εκθετης}}} = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot.....\cdot\alpha}_{\nu\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}$$

- ✓ Ορίζουμε επίσης ότι: $\alpha^0 = 1$, $\alpha^1 = \alpha$ και

- ✓ $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$ με $\alpha \neq 0$

- ✓ **ΠΡΟΣΟΧΗ:** $X \cdot X \cdot X = X^3$ αλλά $X + X + X = 3X$

➢ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- ✓ Ιδιότητες που στηρίζονται στην **ίδια βάση**:

$$\textbf{i)}\ \alpha^{\nu}\cdot\alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu} \qquad \textbf{ii)}\ \frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\nu-\mu}$$

- ✓ Ιδιότητες που στηρίζονται στον **ίδιο εκθέτη** :

$$\textbf{i)}\ \alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu} = (\alpha\cdot\beta)^{\nu} \qquad \textbf{ii)}\ \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}$$

- ✓ Μία άσχετη…(όχι για άσχετους..!!)

$$\left(\alpha^{\nu}\right)^{\mu} = \alpha^{\nu\cdot\mu}$$

- ✓ Με τη βοήθεια του ορισμού $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$ με $\alpha \neq 0$ προκύπτει και η

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu} \text{ με } \alpha,\beta \neq 0$$

✓ Επίσης ισχύουν: $\begin{Bmatrix} (-\alpha)^{\nu} = \alpha^{\nu}, & \text{οπου } \nu \text{ αρτιος} \\ (-\alpha)^{\nu} = -\alpha^{\nu}, & \text{οπου } \nu \text{ περιττος} \end{Bmatrix}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: $\begin{matrix} (-2)^2 = +4 & \text{ενω} & -2^2 = -4 \\ (-2)^3 = -8 & \text{ενω} & -2^3 = -8 \end{matrix}$

✓ Τους πολύ μεγάλους ή τους πολύ μικρούς κατά απόλυτη τιμή αριθμούς, είναι βολικό να τους γράφουμε με **τυποποιημένη μορφή**, δηλαδή με τη μορφή:

$$\alpha \cdot 10^{\nu} \text{ με } 1 \leq |\alpha| \leq 10 \text{ και } \nu \text{ ακέραιο.}$$

π.χ $\begin{matrix} -2500000000 = -2{,}5 \cdot 10^9 \\ 0{,}00000000035 = 3{,}5 \cdot 10^{-10} \end{matrix}$

✓ **ΘΥΜΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ:**

$$\begin{matrix} 10^1 = 10 & & 10^{-1} = 0{,}1 \\ 10^2 = 100 & & 10^{-2} = 0{,}01 \\ 10^3 = 1000 & \textbf{και} & 10^{-3} = 0{,}001 \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ 10^{\nu} = 1\underbrace{00....000}_{\nu \text{ μηδενικα}} & & 10^{\nu} = \underbrace{0{,}00....0}_{\nu \text{ μηδενικα}}1 \end{matrix}$$

➢ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

✓ Για να κάνουμε πράξεις σε μια παράσταση ακολουθούμε την εξής προτεραιότητα πράξεων:

- Αν οι παράσταση έχει παρενθέσεις τότε κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την εξής σειρά:
  (i) Δυνάμεις
  (ii) Πολλαπλασιασμούς-Διαιρέσεις
  (iii) Προσθέσεις-Αφαιρέσεις

- Μόλις τελειώσουμε με τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις ακολουθούμε πάλι την ίδια σειρά, δηλαδή:
  (i) Δυνάμεις
  (ii) Πολλαπλασιασμούς-Διαιρέσεις
  (iii) Προσθέσεις-Αφαιρέσεις

➢ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γράψετε με τη μορφή μιας δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις

(i) $9\cdot 3^5$

(ii) $32:4^6$

(iii) $8^3\cdot 5^9$

(iv) $(-5)^4\cdot 5^3$

(v) $\left[(-3)^4\right]^{-1}:27$

Λύση.

(i) $9\cdot 3^5=3^2\cdot 3^5=3^{2+5}=3^7$

(ii) $32:4^6=2^5:\left(2^2\right)^6=2^5:2^{12}=2^{5-12}=2^{-7}=\dfrac{1}{2^7}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^7$

(iii) $8^3\cdot 5^9=\left(2^3\right)^3\cdot 5^9=2^9\cdot 5^9=(2\cdot 5)^9=10^9$

(iv) $(-5)^4\cdot 5^3=5^4\cdot 5^3=5^{4+3}=5^7$

(v) $\left[(-3)^4\right]^{-1}:27=\left(3^4\right)^{-1}:3^3=3^{-4}:3^3=3^{-4-3}=3^{-7}=\dfrac{1}{3^7}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^7$

2. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις

(i) $\left(-3x^3y\right)^2$

(ii) $2x^2y\cdot\left(-\dfrac{3}{4}x^3y^2\right)$

(iii) $\left(-\dfrac{2}{3}x^2\right)^3\cdot\left(-x^3\right)^2$

(iv) $\left(-x^2y\right)^3\cdot(-2xy)^2:\left(x^8y^7\right)$

Λύση.

(i) $\left(-3x^3y\right)^2=\left(-3\right)^2\cdot\left(x^3\right)^2\cdot y^2=9x^{2\cdot3}y^2=9x^6y^2$

(ii) $2x^2y\cdot\left(-\frac{3}{4}x^3y^2\right)=2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot x^2x^3\cdot y\cdot y^2=-\frac{6}{4}\cdot x^{2+3}\cdot y^{1+2}=-\frac{3}{2}\cdot x^5\cdot y^3$

(iii) $\left(-\frac{2}{3}x^2\right)^3\cdot\left(-x^3\right)^2=\left(-\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(x^2\right)^3\cdot\left(x^3\right)^2=-\frac{2^3}{3^3}\cdot x^6\cdot x^6=-\frac{8}{27}\cdot x^{12}$

(iv) $\left(-x^2y\right)^3\cdot\left(-2xy\right)^2:\left(x^8y^7\right)=\frac{\left(-x^2y\right)^3\cdot\left(-2xy\right)^2}{\left(x^8y^7\right)}=\frac{-x^6y^3\cdot4x^2y^2}{x^8y^7}=-\frac{4x^8y^5}{x^8y^7}=-4y^{5-7}=-4y^{-2}$

3. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης

(i) $A=\left(-15\right)^0-\left(-5\right)^2-5^2-4^3-\left(-4\right)^3$

(ii) $B=\left(-2\right)^x-\left(-\frac{2}{3}\right)^{x-1}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{x-2}$, για $x=-1$

Λύση.

(i) $A=\left(-15\right)^0-\left(-5\right)^2-5^2-4^3-\left(-4\right)^3=1-5^2-25-64+4^3=1-25-25-64+64=-49$

(ii)

$$B=\left(-2\right)^x-\left(-\frac{2}{3}\right)^{x-1}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{x-2}=\left(-2\right)^{-1}-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1-1}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1-2}=$$

$$=-2^{-1}-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}=-\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=$$

$$=-\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(2\right)^3=-\frac{1}{2}-\frac{9}{4}+8=$$

$$=\frac{21}{4}$$

4. Να βρείτε το φυσικό κ, ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

(i) $5^\kappa=1$

(ii) $3^\kappa=9$

(iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^\kappa=\frac{1}{16}$

(iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2\kappa+1}=\frac{8}{27}$

Λύση.

Μεθοδολογία

Οι παραπάνω εξισώσεις λέγονται εκθετικές. Μια εκθετική εξίσωση μπορεί να λυθεί με τον εξής τρόπο:

Τρόπος

Δημιουργούμε και στα δύο μέλη της εξίσωσης δυνάμεις με την ίδια βάση. Έπειτα εξισώνουμε τους εκθέτες των δυνάμεων αυτών και λύνουμε ως προς τον άγνωστο.

(i)

$$5^{\kappa}=1$$
$$5^{\kappa}=5^{0}$$
$$\kappa=0$$

(ii)

$$3^{\kappa}=9$$
$$3^{\kappa}=3^{2}$$
$$\kappa=2$$

(iii)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa}=\frac{1}{16}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa}=\frac{1}{2^{4}}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa}=\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$
$$\kappa=4$$

(iv)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2\kappa+1}=\frac{8}{27}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2\kappa+1}=\frac{2^{3}}{3^{3}}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2\kappa+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$$
$$2\kappa+1=3$$
$$2\kappa=3-1$$
$$2\kappa=2$$
$$\kappa=1$$

➢ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣΗΣ

1. Να αντιστοιχήσετε τα στοιχεία της στήλης Α με αυτά της στήλης Β.

α.

ΣΤΗΛΗ (Α)	ΣΤΗΛΗ (Β)
1. $(-1)^{2009}$	**Α.** $\frac{1}{9}$
2. -3^{-2}	**Β.** 1
3. $9^{-4}\cdot 3^{8}$	**Γ.** $-\frac{1}{9}$
4. $(3^5:3):3^6$	**Δ.** -1
	Ε. 9

β.

ΣΤΗΛΗ (Α)	ΣΤΗΛΗ (Β)
1. $(-3)^2$	**Α.** 9
2. -2^3	**Β.** 6
3. -3^2	**Γ.** -9
4. $-(-2)^3$	**Δ.** -8
	Ε. 8

γ.

ΣΤΗΛΗ (Α)	ΣΤΗΛΗ (Β)
1. $(-\alpha+\beta)^2$	**Α.** $-(\alpha-\beta)^3$
2. $(-\alpha-\beta)^3$	**Β.** $-(\alpha-\beta)^2$
3. $(-\alpha-\beta)^2$	**Γ.** $(\alpha-\beta)^2$
4. $(-\alpha+\beta)^3$	**Δ.** $(\alpha+\beta)^2$
	Ε. $-(\alpha+\beta)^3$

➢ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΚΕΝΟΥ

1. Να συμπληρωθούν οι ισότητες:

α.

$(-2)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$-2^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-2)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$-2^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-2)^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-2)^{-3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

β.

$x^{\mu} : x^{\nu} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x^{-\nu} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(\frac{x}{y}\right)^0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x^{\nu} \cdot y^{\nu} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{x^{\nu}} = \ldots.,\quad \mu\varepsilon \quad \ldots\ldots..$

$(x^{\nu})^{\mu} = \ldots\ldots$

γ.

$(-7)^{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(-\frac{7}{3}\right)^0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Να συμπληρωθούν οι παρακάτω πίνακες:

α.

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	25
x^2	121									

β.

Αριθμός	9	$\frac{1}{8}$	27	$\frac{16}{81}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{144}{169}$
Δύναμη	3^2						

➢ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γράψετε καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη.

$i) 3^5 \cdot 3^{-7} =$

$ii) 2^6 : 2^{-3} =$

$iii) \left(2^{-5}\right)^{-2} =$

$iv) 2^5 \cdot 3^5 =$

$v) \dfrac{12^5}{4^5} =$

$vi) 8 \cdot 2^5 =$

$vii) 9 \cdot 2^{-3} =$

$viii) \dfrac{32}{2^{10}} =$

$ix) 4^5 \cdot 7^{10} =$

$x) (-3)^2 \cdot 3^5 =$

$xi) (-2)^7 \cdot 16 =$

$xii) \dfrac{12^5}{(-3)^5} =$

$xiii) 8 \cdot 2^{15} \cdot \dfrac{1}{2^8} =$

$xiv) \left(\dfrac{5}{3}\right)^{-10} \cdot \left(-\dfrac{5}{3}\right)^8$

2. Να γράψετε κάθε παράσταση ως μια δύναμη.

$A = 2^{13} + 2^{13}$

$B = 2^{33} - 2^{32}$

$\Gamma = 4^{50} - 8^{33}$

$\Delta = 6^{23} \cdot 5^{22} - 6^{22} \cdot 5^{23}$

3. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις: α) $(-3)^2$ και -3^2 και β) $(-3)^3$ και -3^3

4. Να αποδείξετε ότι: $(x-y)^2 = (y-x)^2$ με $x \neq y$

5. Να υπολογιστεί η παράσταση: $A = (-3)^2 - 4^2 + (-1)^3\left[\left(2^4 + 3^2\right) : 5 - (-3)^2 - 1\right]$

6. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $2\alpha^5\beta^3\gamma^2 4\alpha^2\beta^{-3}\gamma^5 \dfrac{1}{16}\alpha^{-4}\beta^{-1}\gamma^4$

β) $\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{2y^2}{5x^3}\right)^{-1} \cdot 4xy^{-4}, x, y \neq 0$

7. Να υπολογιστεί ο x στις παρακάτω ισότητες:

i) $3 \cdot 3^x = 3^5$

ii) $2^x 4 = \dfrac{1}{8}$

iii) $(-2)^{2x} = 16$

iv) $5^{4x-9} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x-4}$

v) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{3x-1} = \dfrac{25}{9}$

8. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i) $A = 2\cdot(-3)^2 - 6\cdot(1-2^{-1}) - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

ii) $B = 2^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^0 - 2^{-2}4 + \left[(-2)^2 : \frac{1}{2}\right]8$

iii) $\Gamma = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(-\frac{9}{8}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 : 8$

iv) $\Delta = 12\left[3^{-4} : \left(2^4 : 3^2 - 2^2 : \frac{9}{8}\right)\right] + \left(2\frac{1}{2}\right)^{-2}$

9. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\left(\frac{1}{3}x^2 : x^3\right)x^{-2}$

ii) $8x^4y^{-1} : \left[\left(2x^3y^2\right)x^0\right]$

iii) $2x^2y^{-3}\cdot\frac{1}{6}\left(x^{-1}y^4\right)^2$

iv) $\left(\frac{xy^2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{x^2y}{3}\right)^2$

v) $(x:y)^{-2}\left(\frac{1}{2}y : x\right)^3$

10. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \left(-2\alpha^2\beta\gamma^3\right)^3 : \left(-\frac{1}{2}\alpha\beta^2\right)^{-2}$ για α = -1, β = 2 και γ = 1.

11. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \dfrac{x^{-4}y^2\left(x^{-1}y^{-2}\right)^4\left(x^{-2}y\right)^{-1}}{\left(x^2y\right)^{-2}y^{-3}}$ και να υπολογιστεί η τιμή της, όταν $x = (-10)^{-5}$ και $y = -10^4$.

12. Αν $xy^2 = -1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$A = y^2\left(x^2y\right)^3\cdot\left(x^5y^3\right)^{-1}$

13. Αν οι αριθμοί x, y είναι αντίστροφοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης
$A = \left(x^{-2}y\right)^3\cdot\left(x^2y^{-1}\right)^2\cdot 2x^3$

Γ. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

➢ ΟΡΙΣΜΟΙ

- ✓ Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού **α** (συμβολισμός $\sqrt{\alpha}$) είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό **α**

- ✓ Δηλαδή έχουμε : αν $x=\sqrt{\alpha}$ τότε $x^2=\alpha$ δηλαδή $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$
(με $\alpha \geq 0$ και $x \geq 0$).

- ✓ Ορίζουμε επίσης $\sqrt{0}=0$ διότι $0^2=0$ και προφανώς $\sqrt{1}=1$ αφού $1^2=1$

➢ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- ✓ $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$ **όμως** $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$

π.χ $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{(-3)^2}=|-3|=3 \\ \text{αλλα} \\ \left(\sqrt{3}\right)^2=\sqrt{3^2}=3 \end{array}\right\}$

- ✓ $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$, προφανώς $\alpha,\beta \geq 0$

<u>Απόδειξη</u>

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\right)^2=\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha}\right)^2\cdot\left(\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha\cdot\beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\beta$$

- ✓ $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, προφανώς $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$

<u>Απόδειξη</u>

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{\beta}\right)^2}=\frac{\alpha}{\beta}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$$

- ***<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>*** **:** ΔΕΝ ισχύει η ιδιότητα $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\pm\beta}$

  π.χ $\left\{\begin{matrix}\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7\\ \sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5\end{matrix}\right\}$. Ελπίζω να παρατηρούμε ότι **ΔΕΝ** είναι ίσα…

Πότε όμως μπορεί να ισχύει;

Απάντηση: Μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους α, β είναι 0

π.χ $\sqrt{0+4}=\sqrt{4}=2$ και $\sqrt{0}+\sqrt{4}=0+2=2$

- ***<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>*** **:** Το σύμβολο $\sqrt{\ }$ χρησιμοποιείται μόνο όταν ο αριθμός (ή η παράσταση) που είναι κάτω από τη ρίζα (δηλαδή η υπόριζη ποσότητα) είναι θετικός ή μηδέν.

  π.χ Η $\sqrt{-3}$ **δε** παίζει μπάλα…!!!!!
  (Μη το δω σε κανένα γραπτό…έτσι παιδάκια….)

- ***<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>*** **:** Η ιδιότητα $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ εφαρμόζεται με την προϋπόθεση ότι $\alpha\geq 0$ και $\beta\geq 0$. Είναι λάθος δηλαδή να γράψουμε

  π.χ $\sqrt{(-4)\cdot(-4)}=\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-4}$

- **ΠΡΟΣΕΞΤΕ ΜΗ ΚΑΝΕΤΕ ΤΟ ΕΞΗΣ…** $\frac{\sqrt{\cancel{2}}}{\cancel{2}}=\sqrt{\ }$

➢ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι

(i) $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

(ii) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}=2\sqrt{21}$

(iii) $\sqrt{12}-\sqrt{75}=-3\sqrt{3}$

Λύση.

Μεθοδολογία

Αν θέλουμε να απλοποιήσουμε την $\sqrt{\alpha}$, γράφουμε τον αριθμό α ως γινόμενο δύο αριθμών, όπου τουλάχιστον ο ένας από τους δύο να είναι τέλειο τετράγωνο (Δηλ.να γράφετε ως ένας αριθμός στο τετράγωνο).

Παράδειγμα: $\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

(i) $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

(ii) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}=\sqrt{6\cdot 14}=\sqrt{84}=\sqrt{4\cdot 21}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{21}=2\sqrt{21}$

(iii) $\sqrt{12}-\sqrt{75}=\sqrt{4\cdot 3}-\sqrt{25\cdot 3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}-5\sqrt{3}=-3\sqrt{3}$

2. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα που έχουν άρρητους παρονομαστές σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές

(i) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

(ii) $\dfrac{6}{\sqrt{48}}$

(iii) $\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$

Λύση.

Μεθοδολογία

Αν θέλουμε να μετατρέψουμε ένα κλάσμα με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος με τον παρονομαστή.

(i) $\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}^2}=\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

(ii) Αρχικά σπάω τη $\sqrt{48}$ με τον τρόπο που μάθαμε παραπάνω.

$$\frac{6}{\sqrt{48}}=\frac{6}{\sqrt{16\cdot 3}}=\frac{6}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}}=\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(iii) $\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=5+\sqrt{\frac{10}{2}}=5+\sqrt{5}$ (Σωστός..;;;)

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων.

(i) $2\sqrt{5}-7\sqrt{5}$

(ii) $3\sqrt{2}-5\sqrt{3}-7\sqrt{2}-\sqrt{3}$

(iii) $\sqrt{22+\sqrt{5+\sqrt{16}}}-\sqrt{8\sqrt{2\sqrt{4}}}+\sqrt{\sqrt{81}}$

(iv) $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}$

Λύση.

(i) $2\sqrt{5}-7\sqrt{5}=(2-7)\sqrt{5}=-5\sqrt{5}$

(ii) $3\sqrt{2}-5\sqrt{3}-7\sqrt{2}-\sqrt{3}=(3-7)\sqrt{2}-(5+1)\sqrt{3}=-4\sqrt{2}-6\sqrt{3}$

(iii)

$$\begin{aligned}
&\sqrt{22+\sqrt{5+\sqrt{16}}}-\sqrt{8\sqrt{2\sqrt{4}}}+\sqrt{\sqrt{81}}=\\
&=\sqrt{22+\sqrt{5+4}}-\sqrt{8\sqrt{2\cdot 2}}+\sqrt{9}=\\
&=\sqrt{22+\sqrt{9}}-\sqrt{8\sqrt{4}}+3=\\
&=\sqrt{22+3}-\sqrt{8\cdot 2}+3=\\
&=\sqrt{25}-\sqrt{16}+3=\\
&=5-4+3=\\
&=1+3=\\
&=4
\end{aligned}$$

(iv) $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=\left|1-\sqrt{3}\right|-\left|1+\sqrt{3}\right|=-\left(1-\sqrt{3}\right)-\left(1+\sqrt{3}\right)=-1+\sqrt{3}-1-\sqrt{3}=-2$

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

(i) $\sqrt{7}+2x=\sqrt{28}+x$

(ii) $\dfrac{x\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\sqrt{8}$

Λύση.

(i)

$$\sqrt{7}+2x=\sqrt{28}+x$$
$$2x-x=\sqrt{28}-\sqrt{7}$$
$$x=\sqrt{4\cdot 7}-\sqrt{7}$$
$$x=\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}-\sqrt{7}$$
$$x=2\sqrt{7}-\sqrt{7}$$
$$x=\sqrt{7}$$

(ii)

$$\frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\sqrt{8}$$
$$x\sqrt{5}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$$
$$x\sqrt{5}=\sqrt{2\cdot 8}$$
$$x\sqrt{5}=\sqrt{16}$$
$$x\sqrt{5}=4$$
$$x=\frac{4}{\sqrt{5}}$$
$$x=\frac{4\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}$$
$$x=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

➢ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ « ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΣ»

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ).

1. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}$ **Σ**☐ **Λ**☐

2. $\sqrt{3}+\sqrt{7}=\sqrt{10}$ **Σ**☐ **Λ**☐

3. $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$ **Σ**☐ **Λ**☐

4. $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ **Σ**☐ **Λ**☐

5. $\sqrt{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2}=1-\frac{2}{3}$ **Σ**☐ **Λ**☐

➢ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣΗΣ

1. Να αντιστοιχήσετε τα στοιχεία της στήλης Α με αυτά της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ (Α)	**ΣΤΗΛΗ (Β)**
1. $\sqrt{9}$	**Α.** 3
2. $\sqrt{-9}$	**Β.** Δεν ορίζεται
3. $\sqrt{3^2}$	**Γ.** -3
4. $\sqrt{(-3)^2}$	
5. $\sqrt{-3^2}$	

➢ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΚΕΝΟΥ

1. Να συμπληρωθούν οι ισότητες:

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\alpha\nu\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sqrt{x^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\alpha\nu\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sqrt{\alpha\cdot\beta} = \ldots\ldots\ldots\ldots\alpha\nu\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sqrt{\alpha^2\cdot\beta} = \ldots\ldots\ldots\ldots\alpha\nu\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\alpha\nu\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x	9	144	625	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{121}{36}$	$\frac{34}{169}$
$\sqrt{x}$	3						

➢ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^4 + \left(\sqrt{3}\right)^6$$

$$B = \sqrt{5^2} + \sqrt{(-3)^2} + \sqrt{2^4}$$

$$\Gamma = \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$$

2. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = \sqrt{19-\sqrt{7+\sqrt{4}}}$$

$$B = \sqrt{8\sqrt{1+\sqrt{9}}}$$

$$\Gamma = \sqrt{9\sqrt{8\sqrt{4}}}$$

$$\Delta = \sqrt{\sqrt{16}}$$

$$E = \sqrt{99+\sqrt{\frac{1}{5}\cdot\sqrt{25}}}$$

3. Να γίνουν οι πράξεις:

$$i)\sqrt{3}+\sqrt{3}$$
$$ii)6\sqrt{2}-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$$
$$iii)2\sqrt{2}-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-4\sqrt{2}$$
$$iv)\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$$
$$v)2\sqrt{3}\cdot4\sqrt{2}\cdot5\sqrt{5}$$
$$vi)\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}$$
$$vii)\frac{\sqrt{56}}{\sqrt{14}}$$

4. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$$
$$B=\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)$$
$$\Gamma=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$i)\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$
$$ii)\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}}=3$$
$$iii)\sqrt{27}+\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$
$$iv)\sqrt{8}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$
$$v)\sqrt{2}\cdot\sqrt{20}=2\sqrt{10}$$
$$vi)\sqrt{2}\sqrt{18}-\sqrt{3}\sqrt{15}+\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{3}}=6-\sqrt{5}$$

6. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$i)\sqrt{8},\quad \sqrt{12},\quad \sqrt{18},\quad \sqrt{20},\quad \sqrt{24},\quad \sqrt{27},\quad \sqrt{28},$$
$$\sqrt{32},\quad \sqrt{40},\quad \sqrt{44},\quad \sqrt{50},\quad \sqrt{52},\quad \sqrt{72},\quad \sqrt{125}$$

$$ii)\sqrt{200},\quad \sqrt{1000}$$

7. Αν α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\sqrt{\alpha^2\beta}$

ii) $\dfrac{\sqrt{\alpha^2\beta}}{\alpha}$

iii) $\sqrt{\alpha^2\beta^4}$

v) $\dfrac{\alpha\sqrt{\alpha\beta^2}+\beta\sqrt{\alpha^2\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$

8. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$\dfrac{2}{\sqrt{2}},\dfrac{3}{\sqrt{7}},\dfrac{20}{\sqrt{5}},\dfrac{8}{\sqrt{2}},\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}$

9. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\dfrac{\alpha}{3\beta}$ και $\sqrt{\dfrac{9\beta^2}{\alpha^2}}$ με α, β θετικοί, είναι αντίστροφοι αριθμοί.

10. Να δείξετε ότι οι παραστάσεις: $\begin{array}{l} A=\sqrt{24}+2\sqrt{10}-2\sqrt{6}-\sqrt{40} \\ B=\sqrt{18}+4\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{162} \end{array}$ είναι ίσες.

11. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A=\dfrac{\sqrt{20}-2\sqrt{8}+3\sqrt{12}}{\sqrt{45}-2\sqrt{18}+3\sqrt{27}}$

12. Να δείξετε ότι οι αριθμοί $2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}$ είναι αντίστροφοι.

13. Να κάνετε τις πράξεις: $\dfrac{1}{\sqrt{8}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ και $\dfrac{3}{\sqrt{3}}-\dfrac{5}{\sqrt{5}}$.

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$i) 5\sqrt{2}+3x=\sqrt{8}+2x$

$ii) x\sqrt{5}-20=0$

$iii) \dfrac{x}{\sqrt{3}}=\sqrt{12}$

$iv) x\sqrt{12}-5=2x\sqrt{3}$

15. Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=1$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ισότητα, να μετατρέψετε το κλάσμα $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ που έχει άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.