

ΜΑΘΗΜΑ 0**Εισαγωγικό Κεφάλαιο:** Ρητοί Αριθμοί**Υποενότητα 1:** Βασικές Επαναληπτικές Έννοιες (Επαναλήψεις-Συμπληρώσεις)**Θεματικές Ενότητες:**

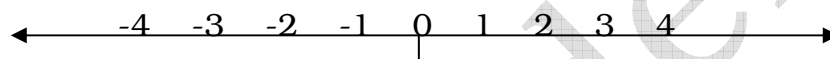
1. Ρητοί αριθμοί-Βασικές επαναληπτικές έννοιες.
2. Πρόσθεση ρητών αριθμών.
3. Άθροισμα πολλών προσθετέων.
4. Αφαίρεση ρητών αριθμών.
5. Απαλοιφή παρενθέσεων.
6. Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών.
7. Γινόμενο πολλών παραγόντων.
8. Διαίρεση ρητών αριθμών.
9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό-ακέραιο.
10. Τυποποιημένη μορφή αριθμών.
11. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών.

0.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ**➤ ΟΡΙΣΜΟΙ**

- ✓ Δύο αριθμοί λέγονται **ομόσημοι** αν έχουν το ίδιο πρόσημο. **Π.χ** +3 και +8.
- ✓ Δύο αριθμοί λέγονται **ετερόσημοι** αν έχουν διαφορετικό πρόσημο. **Π.χ** -1,+14.
- ✓ **Φυσικοί** αριθμοί είναι οι αριθμοί: $\{0,1,2,3,4,5,\dots\}$ και συμβολίζονται με το γράμμα \mathbb{N} από την αγγλική λέξη "Natural"
- ✓ **Ακέραιοι** αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς τους. Δηλαδή οι αριθμοί: $\{\dots,-5,-4-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\dots\}$.
Συμβολίζονται με το γράμμα \mathbb{Z} από τη γερμανική λέξη "zahlen" που σημαίνει αριθμός.

- ✓ **Ρητοί** αριθμοί είναι οι **φυσικοί** αριθμοί, τα **κλάσματα** και οι **δεκαδικοί** μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς.
- ✓ Γενικά ένας αριθμός λέγεται **ρητός** όταν έχει ή μπορεί να πάρει κλασματική μορφή, δηλαδή όταν
π.χ: $4 = \frac{8}{2}$, $2,5 = \frac{5}{2}$, $8,5 = \frac{85}{10}$, $3,0\overline{3} = \frac{300}{99}$
 - Θυμίζουμε ότι κάθε ρητός μπορεί να γραφεί είτε ως δεκαδικός είτε ως περιοδικός δεκαδικός και αντίστροφα.

- ✓ Κάθε ρητός αριθμός παριστάνεται (απεικονίζεται) με ένα σημείο πάνω σε μια ευθεία που λέγεται **άξονας**.



- ✓ Ο παραπάνω άξονας μπορεί να ονομαστεί και **άξονας x'x**.
- ✓ Αν ένα τυχαίο σημείο A του άξονα x'x αντιστοιχίζεται σε έναν αριθμό a, τότε ο αριθμός a λέγεται **τετμημένη** του σημείου a.
- ✓ Ο ημιάξονας **Ox** ονομάζεται **θετικός ημιάξονας** και ο **Ox'** **αρνητικός ημιάξονας**.
- ✓ **Απόλυτη Τιμή** ενός αριθμού a καλούμε την απόσταση του a από την αρχή O.
 - Η απόλυτη τιμή είναι πάντα θετικός αριθμός
 - Συμβολίζεται με $|a|$
 - Βρίσκω την απόλυτη τιμή ενός αριθμού παραλείποντας το πρόσημο.
π.χ $|+5| = 5$ και $|-5| = 5$
 - Η απόλυτη τιμή του 0 είναι το 0, δηλαδή $|0| = 0$.
- ✓ Δύο αριθμοί που έχουν την ίδια απόλυτη τιμή και διαφέρουν στο πρόσημο καλούνται **αντίθετοι** αριθμοί.
 - Βρίσκω τον αντίθετο ενός αριθμού αλλάζοντας το πρόσημο του αριθμού.
π.χ -5 και ο 5
 - Ο αντίθετος του 0 είναι το 0.
 - Ο αντίθετος του **x** είναι ο **-x** και ισχύει: $|-x| = |x|$.

- ✓ Μεταξύ δύο αριθμών μεγαλύτερος είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα στον άξονα.
- ✓ Με τη βοήθεια του άξονα διαπιστώνουμε τα εξής :
 - Από δύο αριθμούς μεγαλύτερος είναι αυτός που βρίσκεται δεξιότερα πάνω στον άξονα
 - Έτσι κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό (αφού οι θετικοί βρίσκονται δεξιότερα στον άξονα)
 - Από δύο θετικούς αριθμούς μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή **π.χ** $+7 > +3$ αφού $|+7|=7 > |+3|=3$.
 - Από δύο αρνητικούς αριθμούς μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή **π.χ** $-3 > -4$ αφού $|-3|=3 < |-4|=4$.
 - Το μηδέν είναι μεγαλύτερο από κάθε αρνητικό και μικρότερο από κάθε θετικό αριθμό (αυτό φαίνεται και από τον κανόνα 1 με τη βοήθεια του άξονα)

➤ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ « ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΣ »

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ).

- | | | | |
|-------------------------------------|----------------------------|----------------------------|--|
| 1. $ +3 =3$ | Σ <input type="checkbox"/> | Λ <input type="checkbox"/> | |
| 2. $ -2 =-2$ | Σ <input type="checkbox"/> | Λ <input type="checkbox"/> | |
| 3. Αν $ a =0$, τότε είναι $a=0$ | Σ <input type="checkbox"/> | Λ <input type="checkbox"/> | |
| 4. Αν $ x =5$, τότε $x=5$ ή $x=-5$ | Σ <input type="checkbox"/> | Λ <input type="checkbox"/> | |
| 5. $ -7 > +5 $ | Σ <input type="checkbox"/> | Λ <input type="checkbox"/> | |
| 6. $-3<0$ | Σ <input type="checkbox"/> | Λ <input type="checkbox"/> | |
| 7. $-(-5)=5$ | Σ <input type="checkbox"/> | Λ <input type="checkbox"/> | |
| 8. $-(+3)=-3$ | Σ <input type="checkbox"/> | Λ <input type="checkbox"/> | |

➤ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$i) |-7| + |+3| - |-2|$$

$$ii) |-3| + 5|+2| - |-1| \cdot |+4|$$

$$iii) |-2| - \frac{|-5|}{|-6|-4} + \frac{1 \cdot |0|}{235}$$

$$iv) \left| -\frac{1}{2} \right| + \left| 3 - \frac{5}{2} \right| + |5 \cdot 2 - 7|$$

2. Να βρείτε τις τιμές του x όταν: $i) |x| = 5$ $ii) |x| = \frac{5}{3}$ $iii) |x| = 0$

3. Να συγκρίνεται τους αριθμούς:

$$i) -5 \dots 0$$

$$ii) 0 \dots +\frac{1}{5}$$

$$iii) +5 \dots +2$$

$$iv) -2 \dots -3$$

$$v) 4 \dots -5$$

$$vi) +7 \dots -7$$

$$vii) -3 \dots +1$$

$$viii) -4 \dots -3$$

4. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς κατά αύξουσα σειρά.

$$i) -3, +5, -5, 0, -2, 1$$

$$ii) -\frac{1}{3}, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}$$

5. Αν δύο σημεία έχουν τετμημένες αντίθετους αριθμούς και απέχουν 10 μονάδες, να βρείτε τις τετμημένες τους.

6. Να βρείτε όλους τους ακέραιους που έχουν απόλυτη τιμή:

i) μικρότερη του 5

ii) μικρότερη ή ίση του 3

0.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

➤ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- ✓ Για να προσθέσουμε δύο αριθμούς ακολουθούμε την εξής διαδικασία:
- Αν οι αριθμοί είναι **ομόσημοι** (δηλαδή έχουν το ίδιο πρόσημο) αρκεί να προσθέσουμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών (δηλαδή τους αριθμούς σκέτους χωρίς πρόσημο) και στο αποτέλεσμα να βάλουμε το πρόσημο που επικρατεί.

π.χ: $+3+4=+7$ και $-3-4=-7$

- Αν οι αριθμοί είναι **ετερόσημοι** (δηλαδή έχουν διαφορετικό πρόσημο) αρκεί να αφαιρέσουμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών (δηλαδή τους αριθμούς σκέτους χωρίς πρόσημο) και στο αποτέλεσμα να βάλουμε το πρόσημο του μεγαλύτερου αριθμού.

π.χ: $+3-4=-1$ και $-3+4=+1$

➤ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

✓ **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ**

(i) **Αντιμεταθετική** Ιδιότητα: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(ii) **Προσεταιριστική** Ιδιότητα: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

(iii) Ιδιότητα **Ουδετέρου**: $\alpha + 0 = \alpha$

(iv) Ιδιότητα **Αντιθέτου**: $\alpha + (-\alpha) = 0$

ΘΥΜΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ:

(*) Για να **προσθέσουμε δύο κλάσματα** διακρίνουμε τις εξής δύο Περιπτώσεις:

(i) Όταν τα κλάσματα είναι **ομώνυμα** (δηλαδή έχουν τους ίδιους παρονομαστές), ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\gamma} \pm \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \pm \beta}{\gamma}, \gamma \neq 0$$

(ii) Όταν τα κλάσματα είναι **ετερόνυμα** (δηλαδή έχουν διαφορετικούς παρονομαστές), βρίσκω το Ε.Κ.Π των παρονομαστών, τα μετατρέπω σε ομώνυμα (με τη γνωστή σε όλους μας διαδικασία με τα καπελάκια) και εφαρμόζω τη παραπάνω διαδικασία, δηλαδή:

$$\frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} \pm \frac{\beta\gamma}{\beta\delta} = \frac{\alpha\delta \pm \beta\gamma}{\beta\delta}, \beta, \delta \neq 0$$

➤ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ « ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΣ »

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ).

1. Το άθροισμα δυο ετερόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός **Σ** **Λ**
2. Αν το άθροισμα ομόσημων ρητών είναι θετικός αριθμός, τότε οι ρητοί είναι θετικοί **Σ** **Λ**
3. Αν το άθροισμα ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός, τότε μεγαλύτερη απόλυτη τιμή έχει ο αρνητικός **Σ** **Λ**
4. Αν το άθροισμα ετερόσημων ρητών είναι αρνητικός αριθμός, τότε οι ρητοί είναι αρνητικοί **Σ** **Λ**
5. Αν $\alpha + \beta = 0$, τότε οι α και β είναι αντίθετοι **Σ** **Λ**

0.3 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΠΟΛΛΩΝ ΠΡΟΣΘΕΤΩΝ

➤ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

✓ Για να προσθέσουμε ένα άθροισμα με περισσότερους από δύο προσθετέους, εργαζόμαστε ως εξής :

1. Προσθέτουμε τους δύο πρώτους αριθμούς ,στο άθροισμα τους προσθέτουμε τον τρίτο στο νέο άθροισμα τον τέταρτο κτλ μέχρι να εξαντλήσουμε όλους τους προσθετέους

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} (-5)+(+7)+(-3)+(+1)+(-7) &= \quad \text{[Προσθέτω ανά δυάδες!!!]} \\ (+2)+(-3)+(+1)+(-7) &= \\ (-1)+(+1) +(-7) &= \\ (+0)+(-7) &= \\ -7 & \end{aligned}$$

ή

2. Διαγράφουμε τους αντίθετους αν υπάρχουν ,κατόπιν προσθέτουμε ξεχωριστά όλους τους θετικούς και όλους τους αρνητικούς και τέλος προσθέτουμε τα δύο αθροίσματα

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} (-5)+(+7)+(+4)+(-3)+(+1)+(-7) &= \quad \text{[Διαγραφή Αντίθετων όρων]} \\ (-5) + (+4) + (-3) + (+1) &= \\ (-5)+(-3) + (+4)+(+1) &= \quad \text{[Χωρισμός θετικών και αρνητικών]} \\ (-8) + (+5) &= \quad \text{[Πρόσθεση θετικών και αρνητικών]} \\ -3 & \end{aligned}$$

➤ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $(-3)+(-2)+(+7)+(+3)$

ii) $5+(+8)+(-3)+(-2)+(+5)+(-7)$

0.4 ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

➤ ΟΡΙΣΜΟΙ

- ✓ Για να βρούμε τη διαφορά (αφαίρεση) $a - b$, προσθέτουμε στον a τον αντίθετο του b , δηλαδή $a - b = a + (-b)$

π.χ

$$\begin{aligned} (+6) - (+5) &= (+6) + (-5) = +1 \\ (-5) - (-4) &= (-5) + (+4) = -1 \\ (-3) - (+1) &= (-3) + (-1) = -4 \\ (+2) - (-7) &= (+2) + (+7) = +9 \\ (-1) - (-2) &= (-1) + ? = ? \\ (+7) - (+9) &= ? = ? \end{aligned}$$

- ✓ Ο a ονομάζεται **μειωτέος** και ο b **αφαιρετέος**.

- ✓ Για τις εξισώσεις έχουμε:

- $x + a = b$ ή $x = b - a$
- $a - x = b$ ή $x = a - b$

➤ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $5 - (-8) + (-2) - (+6) + (+3)$

ii) $-2 + (-6) + 3 - (-7) - (+5)$

iii) $-1,2 + (-2) - (-3,4) - (-1)$

iv) $-7 + |-5| - |+10| - |-6|$

v) $(-3) + (-2) - (+7) - (-6)$

vi) $-9 + (0) - (-10) - (14) + 3$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x + (-3) = -5$

ii) $x + 7 = 4$

iii) $x - 3 = -10$

iv) $5 - x = 7$

v) $13 - x = 18$

vi) $x - (+3) = -7$

0.5 ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ

➤ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- ✓ Για να απαλείψουμε παρενθέσεις ακολουθούμε την εξής διαδικασία.
 - Αν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει το πρόσημο **(+)**, τότε παραλείπουμε το πρόσημο αυτό και την παρένθεση γράφοντας τους όρους της όπως είναι.

π.χ $+(5 - 3 + 9) = +5 - 3 + 9$

- Αν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει το πρόσημο **(-)**, τότε παραλείπουμε το πρόσημο αυτό και την παρένθεση γράφοντας τους όρους της με αντίθετα πρόσημα.

π.χ $-(13 - 5 + 9 - 7 + 3) = -13 + 5 - 9 + 7 - 3$

- ✓ Όταν μπροστά από μια παρένθεση δεν υπάρχει πρόσημο παραλείπουμε απλώς την παρένθεση.

π.χ $(\alpha + \beta + \gamma - \delta) = \alpha + \beta + \gamma - \delta$

- ✓ Όταν τώρα μια παράσταση περιέχει και παρενθέσεις και αγκύλες, η απαλοιφή γίνεται από το εσωτερικό της παράστασης προς το εξωτερικό (δηλαδή από μέσα προς τα έξω...το πιάσαμε το υπονοούμενο...) οπότε η αγκύλη θα γίνεται παρένθεση. Για όσους τους φαίνεται Chinese ας δούνε το επόμενο παραδειγματάκι...

π.χ

$$\begin{aligned}
 & -2 - [3 - (x + 1)] = \\
 & = -2 - (3 - x - 1) = \text{βγαλαμε την μεσα παρενθεση και εγινε η αγκυλη παρενθεση} \\
 & = -2 - 3 + x + 1 = \text{καναμε απαλοιφη της παρενθεσης} \\
 & = x - 4 \quad \text{καναμε πραξεις μεταξυ των αριθμων}
 \end{aligned}$$

➤ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων, αφού πρώτα απαλείψετε τις παρενθέσεις και τις αγκύλες.

$$i) (-3+2) - (5-3) + (7-8)$$

$$ii) 1 - (3-5+1) + (-2+5-7)$$

$$iii) -6 - (-3) + (-7+8-3) - (-5+2-3)$$

$$iv) 1 + [5 - (-6+2)]$$

$$v) -2 - [-7 + (-3+5-7)] - (-5+3)$$

$$vi) -5 + [-3 - (6-2)] - (-2)$$

2. Αν $x = -1 + (3-5)$ και $y = 5 - (-2+7-3)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 5 - (x-3) + (1-y)$.
3. Αν $x = 5 - (2-3) - (-5+8) - 1$ και $y = 1 - [2 + (7-10)]$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = -2 + (x-3) - [2 - (y-1)]$.
4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 3 - [a - (\beta - x)] - (y - a) - (\beta - 1)$ όταν $x + y = -6$.
5. Αν $a - b = -2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
 $A = 3 + (-2 + a) - (5 - \gamma + b) - \gamma$.
6. Αν $a - b = 3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
 $A = 3 - (a + 5) - [7 - (b - 3)]$.
7. Να θέσετε τους δύο τελευταίους όρους της παράστασης $A = x + 5 - y$ μέσα σε παρένθεση, η οποία να έχει μπροστά:
- i) "+"
 ii) "-"
8. Στις παρακάτω παραστάσεις να βάλετε τον 2^ο και τον 3^ο όρο σε παρένθεση που να έχει μπροστά " - " και τους δύο τελευταίους όρους σε παρένθεση που να έχει μπροστά " + ".

$$i) A = 3 - x + 5 + y - 2$$

$$ii) B = 5 + 7 - x - y + 2$$

0.6 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

➤ ΟΡΙΣΜΟΙ

- ✓ Δύο αριθμοί λέγονται **αντίστροφοι** όταν έχουν γινόμενο ίσο με τη μονάδα, δηλαδή αν a, β αντίστροφοι, τότε ισχύει: $a \cdot \beta = 1$.

π.χ το 5 και το $\frac{1}{5}$ είναι αντίστροφοι διότι $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$. Το 0 έχει αντίστροφο???

- ✓ Από το παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι οι αντίστροφοι αριθμοί είναι πάντα **ομόσημοι**.

➤ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- ✓ Για να πολλαπλασιάσουμε δύο αριθμούς ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- Αν οι αριθμοί είναι **ομόσημοι** (δηλαδή έχουν το ίδιο πρόσημο) πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών (δηλαδή τους αριθμούς σκέτους χωρίς πρόσημο) και στο αποτέλεσμα να βάλουμε το πρόσημο **(+)**.

π.χ: $(+3) \cdot (+4) = +12$ και $(-3) \cdot (-4) = +12$

- Αν οι αριθμοί είναι **ετερόσημοι** (δηλαδή έχουν διαφορετικό πρόσημο) πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών (δηλαδή τους αριθμούς σκέτους χωρίς πρόσημο) και στο αποτέλεσμα να βάλουμε το πρόσημο **(-)**.

π.χ: $(+3) \cdot (-4) = -12$ και $(-3) \cdot (+4) = -12$

- ✓ Γενικά όσον αναφορά τα **πρόσημα του πολλαπλασιασμού** έχουμε:

$$(+)\cdot(+)=(+)$$

$$(-)\cdot(-)=(+)$$

$$(+)\cdot(-)=(-)$$

$$(-)\cdot(+)=(-)$$

- $\alpha \cdot 0 = 0$
 $\alpha \cdot 1 = \alpha$
 $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$
 ✓ **ΙΣΧΥΟΥΝ:**
 προσοχή: αλλο το $\alpha + \alpha = 2\alpha$

➤ **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**

✓ **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ**

(i) **Αντιμεταθετική** Ιδιότητα: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

(ii) **Προσεταιριστική** Ιδιότητα: $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

(iii) Ιδιότητα **Ουδετέρου**: $\alpha \cdot 1 = \alpha$

(iv) Ιδιότητα **Αντιστρόφου**: $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$

(v) $\alpha \cdot 0 = 0$ και $\frac{0}{\alpha} = 0, \alpha \neq 0$

ΘΥΜΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ:

(*) Για να **πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα** δεν μας ενδιαφέρει αν είναι ομώνυμα. Άπλα πολλαπλασιάζουμε τους αριθμητές και τους παρονομαστές μεταξύ τους. Δηλαδή θα ισχύει:

$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}, \beta, \delta \neq 0$ ή $\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}, \gamma \neq 0$ αν έχουμε να πολλαπλασιάσουμε αριθμό με κλάσμα.

✓ **ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΣΥΝΔΕΣΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ-ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ**

(i) **Επιμεριστική** Ιδιότητα: $\alpha(\beta \pm \gamma) = \alpha\beta \pm \alpha\gamma$ ή $\alpha\beta \pm \alpha\gamma = \alpha(\beta \pm \gamma)$

(ii) **Διπλή Επιμεριστική** Ιδιότητα: $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

➤ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ « ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΣ »

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ).

1. Το πρόσημο του γινομένου δύο αρνητικών ρητών είναι “ - ” Σ Λ
2. Το πρόσημο του γινομένου δύο ετερόσημων αριθμών είναι “ - ” Σ Λ
3. Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ετερόσημοι Σ Λ
4. Αν $\alpha \cdot \beta = 5$, τότε οι αριθμοί α και β είναι πάντοτε θετικοί Σ Λ
5. Αν $\alpha \cdot \beta = -3$, τότε οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι Σ Λ

0.7 ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

➤ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- ✓ Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων διαφόρων του μηδενός, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές των παραγόντων και στο γινόμενο βάζουμε:
 - Το πρόσημο (+) , αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιο
 - Το πρόσημο (-) , αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι περιττό
 - 0, αν έστω και ένας από τους παράγοντες είναι μηδέν.

➤ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα.

$$i) (+3) \cdot (+2) \cdot (-4)$$

$$ii) (-6) \cdot (+3) \cdot (-2)$$

$$iii) (-2) \cdot (+3) \cdot (-5) \cdot (-1)$$

$$iv) (-5) \cdot (+1) \cdot (-2) \cdot (-6) \cdot (-4)$$

$$v) -4 \cdot (-1) \cdot (+2) \cdot (-3)$$

$$vi) \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

$$i) 1 - 2[-3 + (8 - 2 \cdot 5)]$$

$$ii) -2 \cdot (3 - 7) + 3 \cdot [-17 - 2 \cdot (-8)]$$

$$iii) (5 - 3 \cdot 2) \cdot [-3 \cdot 4 + 7 \cdot (-2)] - 3 \cdot (-2)$$

$$iv) 1 - 2 \cdot [3 - (-4 + 5)] \cdot [-2 + (7 - 8)]$$

3. Αν $\alpha = -2$, $\beta = -3$ και $\gamma = -1$, να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$i) A = 3\alpha - 2\beta + 5\gamma$$

$$ii) B = \alpha\beta - \beta\gamma + \gamma$$

$$iii) \Gamma = \gamma - \alpha\beta\gamma + 2\beta$$

$$iv) \Delta = (\alpha - \beta) \cdot (\beta - 3\gamma)$$

4. Αν $x = -2$ να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$i) A = (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+2013)$$

$$ii) B = x \cdot (x+1) \cdot (3x-10)$$

$$iii) \Gamma = (x-3) \cdot (x-2) \cdot (x+1) \cdot (2x+1)$$

5. Αν οι αριθμοί α , β είναι αντίθετοι και οι x , y αντίστροφοι, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha - (5 - \beta) - x \cdot (3 - y) + 3x$.

0.8 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

➤ ΟΡΙΣΜΟΙ

- ✓ Το πηλίκο της διαίρεσης $\alpha : \beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta}$, λέγεται **λόγος του α προς το β** και ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $\beta x = \alpha$ ή $x = \frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$).

➤ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- ✓ Για να διαιρέσουμε δύο ακέραιους αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε:
 - Το πρόσημο (+) , αν οι αριθμοί είναι ομόσημοι
 - Το πρόσημο (-) , αν οι αριθμοί είναι ετερόσημοι.
- ✓ Γενικά όσον αναφορά τα πρόσημα του πολλαπλασιασμού έχουμε:

$$(+):(+)=(+)$$

$$(-):(-)=(+)$$

$$+):(-)=(-)$$

$$(-):(+) = (-)$$

- ✓ **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Διάρθρωση με διαιρέτη το 0 **ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ**

$$\alpha : 0 = \text{ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ}$$

- ✓ **ΙΣΧΥΟΥΝ:**
 - $0 : \alpha = 0$
 - $\alpha : 1 = \alpha$
 - $\alpha : \alpha = 1$

- ✓ Για να διαιρέσουμε δύο αριθμούς, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. Δηλαδή: $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$. Προφανώς $\beta \neq 0$, δηλαδή **β ΟΧΙ 0...**

- ✓ Για να **διαιρέσουμε δύο κλάσματα**, αρκεί να αντιστρέψω τους όρους του δευτέρου κλάσματος και να κάνω πολλαπλασιασμό. Δηλαδή θα ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}, \beta, \gamma, \delta \neq 0$$

➤ **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ**

- ✓ Για να κάνουμε πράξεις σε μια παράσταση ακολουθούμε την εξής προτεραιότητα πράξεων:
- Αν οι παράσταση έχει παρενθέσεις τότε κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την εξής σειρά:
 - (i)** Πολλαπλασιασμούς-Διαιρέσεις
 - (ii)** Προσθέσεις-Αφαιρέσεις
 - Μόλις τελειώσουμε με τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις ακολουθούμε πάλι την ίδια σειρά, δηλαδή:
 - (i)** Πολλαπλασιασμούς-Διαιρέσεις
 - (ii)** Προσθέσεις-Αφαιρέσεις

➤ **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ « ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΣ »**

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ).

- | | | |
|---|----------------------------|----------------------------|
| 1. Το ηλίκο δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός | Σ <input type="checkbox"/> | Λ <input type="checkbox"/> |
| 2. Αν $\alpha < 0$ και $\beta > 0$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} < 0$ | Σ <input type="checkbox"/> | Λ <input type="checkbox"/> |
| 3. Αν $\frac{1}{\alpha} < 0$, τότε και $\alpha < 0$ | Σ <input type="checkbox"/> | Λ <input type="checkbox"/> |
| 4. Η εξίσωση $\alpha x = \beta (\alpha \neq 0)$ έχει μοναδική λύση την $x = \frac{\beta}{\alpha}$ | Σ <input type="checkbox"/> | Λ <input type="checkbox"/> |

➤ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

i) $3x = 6$

ii) $-2x = 5$

iii) $-6x = -18$

iv) $5x = -\frac{2}{3}$

v) $-\frac{3}{5}x = 2$

vi) $-\frac{5}{3}x = -\frac{10}{3}$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $1 + \frac{-3}{2} - \frac{5}{-3}$

ii) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right)$

iii) $\frac{5-7}{3} + \frac{3+2 \cdot (-4)}{6} + \frac{|-6|-|2|}{-3}$

iv) $\left(1 - \frac{3}{2}\right) : \left(\frac{5}{3} - 2\right)$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $1 - 3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + (-5) \cdot \frac{2}{3} : \left(-\frac{1}{2}\right)$

ii) $\left(1 - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right) - 5 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$

iii) $1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{2}\right) + \frac{5}{2} \cdot (-4)$

iv) $-\frac{5}{6} : \left(-3 + \frac{7}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left[-3 \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) + 1\right]$

v) $1 - 3 \cdot \left[5 - (-2) \cdot (-3) - \frac{1}{2}\right] : \left(2 - \frac{5}{2}\right)$

vi) $\frac{2 \cdot (-3) + 5}{3} : \frac{7 - 7 \cdot (-1) - (-3) \cdot (-4)}{-2 \cdot (-5) - 14} - 1$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $\frac{1 - \frac{5}{3}}{\frac{3}{2} - 2}$

ii) $\frac{-\frac{5}{2} + 1}{2(-3)}$

iii) $\frac{1 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3}}{7 - 2 \cdot (-5)}$

5. Αν $\alpha = 1 - \frac{2}{3}$ και $\beta = \frac{4}{3} - \frac{5}{6}$, να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

i) $A = \alpha + \beta$

ii) $B = \alpha\beta$

iii) $\Gamma = \frac{\alpha}{\beta}$

6. Αν $\alpha = -\frac{2}{3}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ και $\gamma = -5$, να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

i) $A = 1 - \alpha \cdot \beta + \beta : \alpha + \gamma$

ii) $B = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\gamma}{\beta} - 1$

iii) $\Gamma = \alpha \cdot \beta : \gamma - 2\beta - \frac{1}{\alpha}$

iv) $\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta} - \frac{\gamma}{\alpha - \beta}$

7. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{3}{2}$ να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

i) $A = \frac{\alpha + \beta}{\beta}$

ii) $B = \frac{\alpha - \beta}{\alpha}$

iii) $\Gamma = \frac{2\alpha + 3\beta}{5\beta}$

iv) $\Delta = \frac{3\alpha - 2\beta}{\alpha}$

0.9-0.10 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΦΥΣΙΚΟ ΚΑΙ ΑΚΕΡΑΙΟ

➤ ΟΡΙΣΜΟΙ

- ✓ Αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ο ν φυσικός με $\nu > 1$, ορίζουμε ότι

$$\underbrace{\alpha}_{\text{βάση}}^{\text{Εκθέτης } \nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παραγοντες}}$$

- ✓ Η δύναμη a^ν διαβάζεται **νιοστή δύναμη του α**.
- ✓ Η δύναμη a^2 λέγεται και **τετράγωνο του α** ή **α στο τετράγωνο**.
- ✓ Η δύναμη a^3 λέγεται και **κύβος του α** ή **α στον κύβο**.
- ✓ Ορίζουμε τα εξής : $a^0 = 1$, $a^1 = a$ και
- ✓ $a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu}$ με $a \neq 0$.
- ✓ **ΠΡΟΣΟΧΗ:** $X \cdot X \cdot X = X^3$ αλλά $X + X + X = 3X$

➤ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- ✓ Ιδιότητες που στηρίζονται στην ίδια βάση:

$$\mathbf{i)} \alpha^\nu \cdot \alpha^\mu = \alpha^{\nu+\mu} \quad \mathbf{ii)} \frac{\alpha^\nu}{\alpha^\mu} = \alpha^{\nu-\mu}$$

- ✓ Ιδιότητες που στηρίζονται στον ίδιο εκθέτη :

$$\mathbf{i)} \alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha \cdot \beta)^\nu \quad \mathbf{ii)} \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$$

- ✓ Μία άσχετη...(όχι για άσχετους..!!)

$$(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu \cdot \mu}$$

- ✓ Με τη βοήθεια του ορισμού $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$ με $\alpha \neq 0$ προκύπτει και η $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$ με $\alpha, \beta \neq 0$

- ✓ Επίσης ισχύουν: $\left\{ \begin{array}{l} (-\alpha)^{\nu} = \alpha^{\nu}, \text{ όπου } \nu \text{ άρτιος} \\ (-\alpha)^{\nu} = -\alpha^{\nu}, \text{ όπου } \nu \text{ περιττός} \end{array} \right\}$

$$10^1 = 10$$

$$10^{-1} = 0,1$$

$$10^2 = 100$$

$$10^{-2} = 0,01$$

- ✓ $10^3 = 1000$ **και** $10^{-3} = 0,001$

.....

.....

$$10^{\nu} = \underbrace{100 \dots 000}_{\nu \text{ μηδενικά}}$$

$$10^{-\nu} = \underbrace{0,00 \dots 01}_{\nu \text{ μηδενικά}}$$

➤ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- ✓ Για να κάνουμε πράξεις σε μια παράσταση ακολουθούμε την εξής προτεραιότητα πράξεων:
 - Αν οι παράσταση έχει παρενθέσεις τότε κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την εξής σειρά:
 - (i) Δυνάμεις
 - (ii) Πολλαπλασιασμούς-Διαιρέσεις
 - (iii) Προσθέσεις-Αφαιρέσεις
 - Μόλις τελειώσουμε με τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις ακολουθούμε πάλι την ίδια σειρά, δηλαδή:
 - (i) Δυνάμεις
 - (ii) Πολλαπλασιασμούς-Διαιρέσεις
 - (iii) Προσθέσεις-Αφαιρέσεις

➤ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ « ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΣ »

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ).

1. Αν $a < 0$ και n άρτιος, τότε $a^n < 0$

Σ Λ

2. $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$

Σ Λ

3. $(a \cdot b)^n = a \cdot b^n$

Σ Λ

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Σ Λ

5. $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$

Σ Λ

6. $(+7)^5 = 7^5$

Σ Λ

7. $(-13)^2 = 13^2$

Σ Λ

8. $(-7)^{52} = -7^{52}$

Σ Λ

9. $(-5)^7 = -5^7$

Σ Λ

10. $(-1)^{100} = 1$

Σ Λ

11. $-3^2 = 9$

Σ Λ

12. $-(-3)^8 = -3^8$

Σ Λ

13. $-(-5)^7 = 5^7$

Σ Λ

14. $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$

Σ Λ

15. $(-235)^0 = 1$

Σ Λ

16. $\left(\frac{17}{13}\right)^3 = \left(\frac{13}{17}\right)^{-3}$

Σ Λ

17. $5^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

Σ Λ

18. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2$

Σ Λ

19. $(-2)^{-3} = -\frac{1}{2^3}$

Σ Λ

20. $10^{-3} = 0,01$

Σ Λ

21. $\frac{1}{2^{-3}} = 2^3$

Σ Λ

➤ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΚΕΝΟΥ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με το πρόσημο της κάθε παράστασης.

Παράσταση	$(+7)^9$	$(-5)^{11}$	$(-3)^{12}$	-3^4	$-(-5)^8$	$-(-7)^3$
Πρόσημο						

2. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

i) $(\alpha^\mu)^\nu = \dots$

v) $a^0 = \dots, a \neq 0$

ii) $(\alpha \cdot \beta)^\nu = \dots$

vi) $a^{-\nu} = \dots = \dots, a \neq 0$

iii) $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \dots$

vii) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \dots, \alpha, \beta \neq 0$

iv) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \dots$

viii) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1} = \dots, \alpha, \beta \neq 0$

3. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με ένα από τα σύμβολα “ < ” ή “ > ” .

i) $(+2)^5 \dots 0$

ii) $(-3)^8 \dots 0$

iii) $(-7)^3 \dots 0$

iv) $(-1)^{301} \dots 0$

➤ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $(+2)^3 + (-5)^2 + (-2)^3$

ii) $(-7)^2 - 6^2 - (-2)^3$

iii) $5 - (-4)^2 - 3^2 - (-1)^7$

iv) $(-1)^6 + (-5)^3 - 3^4 - (-2)^4$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $2^3 \cdot 2^2 + \frac{2^7}{2^3} - (2^2)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

ii) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{(2^3)^4}{2^{10}} + \frac{2^{14}}{2^5 \cdot 2^7}$

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

i) $1^{-3} + 2^{-1} + (-2)^{-2}$

ii) $2 \cdot 3^{-1} - (-3)^{-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$

iii) $3 \left[(-2)^{-1} \right]^{-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \frac{1}{3^{-2}}$

iv) $(-2)^{-3} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} - \left(-\frac{4}{3}\right)^{-1}$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

$$i) \frac{3^5}{3^3} - \frac{6^7}{3^7} - (2^3)^2$$

$$ii) \frac{(-18)^4}{(-6)^4} - \frac{(-5)^7}{(-5)^5} - [(-2)^3]^2$$

$$iii) \frac{(-6)^5}{3^5} - \frac{8^4}{(-4)^4} + \frac{10^3}{(-5)^3}$$

$$iv) \frac{(-6)^4}{3^4} - \frac{8^3}{(-4)^3} + \frac{10^4}{(-5)^4}$$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

$$i) (7 - 3 \cdot 2)^{13} - \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$ii) 5 \cdot (21 - 2 \cdot 3^2)^2 - \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3}\right)^2$$

$$iii) \left(2 - \frac{7}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - (-1)^6$$

$$iv) \left(\frac{1}{2} - 1\right)^3 - 3 \cdot [(-2)^5 + 31]^{53}$$

6. Αν $x = -2$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = x^3 - x^2 - 3x - 1$$

$$B = -3x^4 + 5x^3 - 3x + 1$$

7. Αν $x = -\frac{3}{2}$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$B = 8x^3 - 4x^2 - 4x - 1$$

8. Αν $x = -\frac{1}{3}$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = x^3 - x^2 - 1$$

$$B = 27x^3 - 3x^2 - 2x + 1$$

9. Αν $\alpha = -2$, $\beta = -3$ και $\gamma = -1$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \alpha^3 - \beta^2 - \gamma^2$$

$$B = 3\alpha^2 - 2\beta^3 - 3\gamma^2$$

$$\Gamma = \gamma^6 + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^3$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

10. Αν $\alpha = -2$ και $\beta = -3$, να επαληθεύσετε την ισότητα:

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

11. Να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} \quad \text{όταν } x = 2$$

$$B = x^x + x^{-x} \quad \text{όταν } x = -3$$

$$\Gamma = 3 \cdot 2^{x+1} - 2x^2 + 6 \cdot 2^{x+2} \quad \text{όταν } x = -2$$

$$\Delta = 2^{x-3y} + (2^x)^{y+1} - 3 \cdot 2^{5y+2} \quad \text{όταν } x = -5 \text{ και } y = -1$$

12. Αν $x = 2^{-2}$, $y = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$, $z = -2$ να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{z} + \frac{xy}{2}$$

13. Αν $\alpha\beta = -2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 5\alpha^3 \cdot \beta^3 - \frac{\alpha^{-2}}{\beta^2}$.

0.11 ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ ΑΡΙΘΜΩΝ

➤ ΟΡΙΣΜΟΙ

- ✓ Τους πολύ μεγάλους ή τους πολύ μικρούς κατά απόλυτη τιμή αριθμούς, είναι βολικό να τους γράφουμε με **τυποποιημένη μορφή**, δηλαδή με τη μορφή: $a \cdot 10^n$ με $1 \leq |a| \leq 10$ και n ακέραιο.

π.χ $-2500000000 = -2,5 \cdot 10^9$
 $0,00000000035 = 3,5 \cdot 10^{-10}$

- ✓ Από θετικούς αριθμούς με τυποποιημένη μορφή μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει το μεγαλύτερο εκθέτη στο 10.

➤ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

i) 30.000.000

ii) 5600000

iii) 243000000

iv) 0,00002

v) 0,00000034

vi) 0,000000000735

0.12 ΔΕΚΑΔΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

➤ ΟΡΙΣΜΟΙ

- ✓ Αν ένας ρητός είναι ακέραιος, τότε προφανώς γράφεται ως δεκαδικός.
- ✓ Αν ένας ρητός είναι κλάσμα της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$ (με $\frac{\alpha}{\beta}$ ανάγωγο), τότε διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:
 - Αν ο παρονομαστής του κλάσματος γράφεται ως γινόμενο δυνάμεων του 2 και του 5, δηλαδή $\beta = 2^v \cdot 5^k$, τότε ο ρητός $\frac{\alpha}{\beta}$ γράφεται ως δεκαδικός.
 π.χ $\frac{37}{20} = \frac{37}{2^2 \cdot 5} = 1,85$
 - Αν ο παρονομαστής του κλάσματος **δεν** γράφεται ως γινόμενο δυνάμεων του 2 και του 5, τότε ο ρητός $\frac{\alpha}{\beta}$ **δεν** γράφεται ως δεκαδικός. Στη περίπτωση αυτή έχουμε τους **περιοδικούς δεκαδικούς** αριθμούς όπου επαναλαμβάνεται ένας αριθμός η πλήθος αριθμών.
 π.χ $\frac{1}{3} = 0,33333\dots$ ή $0,\bar{3}$ και ο αριθμός $\frac{163}{99} = 1,64646464\dots$ ή $1,\overline{64}$ ακόμα και ο αριθμός $\frac{91}{41} = 2,06818181\dots$ ή $2,06\overline{81}$.
- ✓ Το πλήθος των επαναλαμβανόμενων δεκαδικών ψηφίων κάθε περιοδικού αριθμού ονομάζεται **περίοδος**.
- ✓ Κάθε **ρητός** αριθμός μπορεί να γραφτεί ως **δεκαδικός** ή ως **περιοδικός δεκαδικός αριθμός**.
- ✓ Κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφτεί ως ρητός με κλασματική μορφή.
- ✓ Το σύνολο των ρητών αριθμών αποτελείται από τους **δεκαδικούς** και τους **περιοδικούς αριθμούς**.

➤ **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ**

- ✓ Για να μετατρέψουμε **έναν περιοδικό δεκαδικό αριθμό σε κλάσμα** ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία.
 - i)** Θέτουμε τον περιοδικό αριθμό a ίσο με x , δηλαδή $x = a$ (1).
 - ii)** Αν ο x είναι μικτός, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (1) με την κατάλληλη δύναμη του 10 ώστε ο μικτός να γίνει απλός περιοδικός.
 - iii)** Αν ο x είναι απλός περιοδικός, πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της (1) με μια δύναμη του 10 που έχει εκθέτη όσα τα ψηφία της περιόδου.
 - iv)** Γράφουμε το 2^ο μέλος ως άθροισμα ενός φυσικού και ενός άλλου που εκφράζεται με τη βοήθεια του x .
 - v)** Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.
 - vi)** Ας δούμε μερικά παραδείγματα γιατί ούτε εγώ κατάλαβα...(Σωστός...??)

Π.χ Να γραφούν σε κλασματική μορφή οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί.

α) $0,\bar{7}$

β) $-1,\bar{53}$

Έστω $x = 0,\bar{7}$

Έστω $x = -1,\bar{53}$

$x = 0,7777...$

$x = 1,535353...$

$10x = 7,777...$

$100x = 153,5353...$

$10x = 7 + 0,7777...$

$100x = 153 + 0,5353...$

$10x = 7 + x$

$100x = 153 + (x - 1)$

$10x - x = 7$

$100x = 153 + x - 1$

$9x = 7$

$100x - x = 153 - 1$

$x = \frac{7}{9}$

$99x = 152$

$x = \frac{152}{99}$

Άρα $0,\bar{7} = \frac{7}{9}$

Άρα $-1,\bar{53} = -\frac{152}{99}$

- ✓ Πολλές φορές σε ασκήσεις αντικαθιστούμε τους δεκαδικούς περιοδικούς με περίοδο το 9 στον πλησιέστερο δεκαδικό.

Π.χ i) $1,\bar{9} = 2$ ii) $0,\bar{79} = 0,8$ iii) $5,\bar{469} = 5,47$

➤ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γράψετε σε δεκαδική μορφή τους ρητούς:

i) $-\frac{7}{10}$ ii) $\frac{15}{8}$ iii) $\frac{17}{20}$ iv) $\frac{5}{3}$ v) $\frac{30}{11}$ vi) $-\frac{91}{44}$

2. Να βρείτε την κλασματική μορφή των αριθμών:

i) 3,2 ii) -5,42 iii) 0,047 iv) $1,\bar{5}$ v) $3,\bar{26}$ vi) $9,\bar{73}$ vii) $1,\bar{275}$

3. Να βρείτε μια άλλη δεκαδική μορφή για τους αριθμούς:

i) $0,\bar{9}$ ii) $1,\bar{29}$ iii) $2,30\bar{9}$

➤ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Ποιοι αριθμοί λέγονται ρητοί.
2. Τι λέγεται απόλυτη τιμή ενός αριθμού x.
3. Ποιοι αριθμοί λέγονται αντίθετοι.
4. Πώς συγκρίνουμε τους ρητούς αριθμούς.
5. Πώς προσθέτουμε ομόσημους και πώς ετερόσημους αριθμούς.
6. Ποιες ιδιότητες της πρόσθεσης γνωρίζεται.
7. Πώς προσθέτουμε περισσότερους από δύο ρητούς.
8. Πώς γίνεται η αφαίρεση δύο ρητών.
9. Τι είναι το αλγεβρικό άθροισμα ρητών αριθμών.
10. Πώς απαλείφουμε τις παρενθέσεις από μια παράσταση.
11. Πώς πολλαπλασιάζουμε ομόσημους και πώς ετερόσημους αριθμούς.
12. Ποιές είναι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού.
13. Πότε δύο ρητοί λέγονται αντίστροφοι.
14. Ποιον κανόνα εφαρμόζουμε για να υπολογίσουμε το γινόμενο πολλών παραγόντων.
15. Πώς διαιρούμε δύο ομόσημους και πώς δύο ετερόσημους αριθμούς.
16. Τι ονομάζουμε λόγο του αριθμού α προς το β.
17. Τι ονομάζουμε νιοστή δύναμη ενός ρητού α, για ν φυσικό μεγαλύτερο του 1.
18. Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων.
19. Πώς ορίζεται η δύναμη ρητού $\alpha \neq 0$, με εκθέτη αρνητικό ακέραιο και πώς ορίζεται με εκθέτη μηδέν.
20. Ποιοι αριθμοί λέγονται περιοδικοί δεκαδικοί.
21. Πώς γράφουμε έναν αριθμό σε τυποποιημένη μορφή.