Μάθημα 1

Κεφάλαιο: Εισαγωγικό

Θεματικές Ενότητες:

Α. Το Λεξιλόγιο της Λογικής

Β. Σύνολα

Α. ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Ορισμός

✓ **Πρόταση** λέμε κάθε φράση που με βάση το νοηματικό της περιεχόμενο μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ή ως **αληθή** ή ως **ψευδή**. Συνήθως τις προτάσεις τις συμβολίζουμε με p, q, …

Αληθείς Προτάσεις

✓ **Ορισμός** λέγεται η πρόταση που καθορίζει τη σημασία ενός νέου όρου.
π.χ Παραλληλόγραμμο λέμε το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

✓ **Θεώρημα** λέμε την πρόταση που η αλήθεια της μπορεί να προκύψει ως λογικό συμπέρασμα από άλλες αληθείς προτάσεις.
π.χ Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

✓ **Πόρισμα** λέμε την πρόταση που η αλήθεια της μπορεί να προκύψει άμεσα ως λογικό συμπέρασμα από ένα θεώρημα.
π.χ Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι αν ένα τρίγωνο έχει δυο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.

✓ **Αξίωμα** λέμε μια αρχική πρόταση που τη δεχόμαστε ως αληθή.
π.χ Από δυο σημεία διέρχεται μόνο μία ευθεία.

✓ **Γενικά** η αλήθεια μιας πρότασης μπορεί να προκύψει είτε:
- Άμεσα από έναν ορισμό είτε
- Από θεώρημα ή πόρισμα ή αξίωμα.

Απλές και Σύνθετες Προτάσεις

- ✓ Μια πρόταση λέγεται **απλή,** όταν κανένα τμήμα της δεν αρκεί για να σχηματιστεί μια άλλη πρόταση.

- ✓ Μια πρόταση λέγεται **σύνθετη,** όταν μπορούμε να τη χωρίσουμε σε δύο ή περισσότερες προτάσεις.

- ✓ Η δημιουργία μιας σύνθετης πρότασης μπορεί να προκύψει:
  a) Μετασχηματίζοντας μια πρόταση με χρησιμοποίηση του «**δεν**» (**Άρνηση**)

  b) Συνδέοντας δύο προτάσεις με τις λέξεις:
  - Και (**Σύζευξη**)
  - Ή (**Διάζευξη)**
  - Αν…., τότε (**Συνεπαγωγη**)
  - Αν και μόνο αν (**Ισοδυναμία**)
  - Ή μόνο …ή μόνο (**Αποκλειστική διάζευξη**)

ΠΙΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ

1. Άρνηση

Έστω η απλή πρόταση p, π.χ ο 5 είναι περιττός. Με τη χρησιμοποίηση του «**δεν**» σχηματίζουμε τη σύνθετη πρόταση «**όχι p**», δηλαδή ο 5 δεν είναι περιττός, που λέγεται **άρνηση του p**.

2. Διάζευξη

Έστω p, q δύο προτάσεις, τότε η πρόταση «p **ή** q» λέγεται **διάζευξη** των p, q και είναι αληθής, όταν μια τουλάχιστον από τις p, q είναι αληθής.

π.χ1 Όταν λέμε ότι αληθεύει η πρόταση «α=0 **ή** β=0» εννοούμε ότι αληθεύει μια τουλάχιστον από τις προτάσεις «α=0» , «β=0».

3. Σύζευξη

Έστω p, q δύο προτάσεις, τότε η πρόταση «p **και** q» λέγεται **σύζευξη** των p, q και είναι αληθής, όταν **και οι δύο** προτάσεις p, q είναι αληθής.

π.χ Όταν λέμε ότι «Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο **και** ισοσκελές, εννοούμε ότι **και οι δύο** προτάσεις από τις οποίες σχηματίζεται **p:** «το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο» **και q:** «το ΑΒΓ είναι ισοσκελές» είναι αληθείς.

4. Συνεπαγωγή

Έστω p, q δύο προτάσεις, τότε η πρόταση «**αν p, τότε q**» συμβολικά « $p \Rightarrow q$ » λέγεται **συνεπαγωγή** με **υπόθεση** p και **συμπέρασμα** q.
Η πρόταση $p \Rightarrow q$ διαβάζεται:

- Αν p τότε q
- Η p συνεπάγεται την q
- Η p είναι ικανή συνθήκη για τη q
- Η q είναι αναγκαία συνθήκη για την p

π.χ Έστω οι απλές προτάσεις: **p**: «α=2» και **q:** «$α^2$=4». Συνδέοντας αυτές με το «**αν..τότε**» σχηματίζεται η σύνθετη πρόταση:

Αν α=2 **τότε** $α^2$=4 η οποία είναι αληθής.

Γενικά όταν θέλουμε να αποδείξουμε την αλήθεια μιας συνεπαγωγής παίρνουμε την **υπόθεση p** ως αληθή και αποδεικνύουμε ότι είναι αληθής και το **συμπέρασμα q**.

Ερώτηση1: « **Αν** $α^2$=4 **τότε** α=2» που λέγεται **αντίστροφη συνεπαγωγή** της $p \Rightarrow q$ και συμβολίζεται με $q \Rightarrow p$ είναι αληθής πρόταση;

5. Ισοδυναμία

Έστω p, q δύο προτάσεις, τότε η πρόταση « **p αν και μόνο αν q**» συμβολικά « $p \Leftrightarrow q$ » λέγεται **ισοδυναμία** και διαβάζεται:

- p ισοδυναμεί με q
- p αν και μόνο αν q
- Αν p τότε q και αντιστρόφως
- Η p είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την q.

Γενικά όταν θέλουμε να αποδείξουμε την αλήθεια μιας ισοδυναμίας $p \Leftrightarrow q$ ακολουθούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους:

- Υποθέτουμε ότι αληθεύει η p και αποδεικνύουμε την αλήθεια της q και το αντίστροφο δηλαδή Υποθέτουμε ότι αληθεύει η q και αποδεικνύουμε την αλήθεια της p.

- Υποθέτουμε ότι αληθεύει η q και με γνωστές ισοδυναμίες καταλήγουμε στην p.

π.χ 1 Έστω οι απλές προτάσεις: **p**: «α=2» και **q:** «$α^2$=4». Αν υποθέσουμε ότι ο α είναι **φυσικός αριθμός** τότε προφανώς αληθεύουν οι συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$, δηλαδή αληθεύει η ισοδυναμία $p \Leftrightarrow q$.

π.χ 2 Ισοδυναμίες έχουμε στις προτάσεις που είναι ορισμοί. Δηλαδή έστω ο ορισμός: « Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες». Έστω τώρα οι προτάσεις:
p: το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο
q: το τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες.
Τότε ισχύει $p \Leftrightarrow q$, δηλαδή:

- Αν το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, τότε έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες και
- Αν το τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

π.χ3 Γνωρίζουμε ότι: «*Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α* και *β είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α* και *β είναι ίσος με το μηδέν»*. Για να δηλώσουμε ότι ένας τουλάχιστον από τους *α* και *β* είναι ίσος με το μηδέν, γράφουμε *α* = 0 ή *β*=0. Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \ \eta \ \beta = 0$

π.χ4 Γνωρίζουμε ότι:«*Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α* και *β είναι διάφορο του μηδενός, αν και μόνον αν και οι δύο αριθμοί α* και *β είναι διάφοροι του μηδενός»*. Για να δηλώσουμε ότι και οι δύο αριθμοί *α* και *β* είναι διάφοροι του μηδενός γράφουμε $\alpha \neq 0 \ \text{και} \ \beta \neq 0$
Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \ \text{και} \ \beta \neq 0$

6. Αποκλειστική Διάζευξη

Με τις προτάσεις p, q μπορούμε να σχηματίσουμε την πρόταση « ή μόνο p ή μόνο q» που ονομάζεται **αποκλειστική διάζευξη** των p, q και είναι αληθής, όταν η μία είναι αληθής και η άλλη ψευδής.

Ο νόμος της αντιθετοαντιστροφής

✓ Έστω p, q δύο προτάσεις. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$« (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\text{οχι } q \Rightarrow \text{οχι } p) »$$

π.χ Αν ισχύει η συνεπαγωγή «αν α=β, τότε γ=δ», τότε ισχύει και η αντιθετοαντιστροφή της, δηλαδή «αν $\gamma \neq \delta$, τότε $\alpha \neq \beta$ ».

Απόδειξη μιας Πρότασης

- ✓ **Απόδειξη** μιας πρότασης είναι η διαδικασία με την οποία καταλήγουμε στην αλήθεια της πρότασης, χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις όπως ορισμούς, θεωρήματα, πορίσματα, αξιώματα.

- ✓ Η σημαντικότεροι τρόποι απόδειξης είναι οι εξής:
  - Η **ευθεία** απόδειξη (Ξεκινώντας από την υπόθεση και καταλήγοντας στο συμπέρασμα - 1ος Τρόπος)
  - Η **ισοδυναμία** (2ος Τρόπος)
  - Η απόδειξη με τη χρήση της **απαγωγής σε άτοπο** (3ος Τρόπος)

1ος Τρόπος

Εφαρμογή: Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

Λύση

Ξεκινάμε από το πρώτο μέλος της εξίσωσης και θα καταλήξουμε στο δεύτερο. Αναλυτικά έχουμε:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=[(\alpha+\beta)+\gamma]^2=(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2$$

2ος Τρόπος

Εφαρμογή: Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2$

Λύση

Δουλεύουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης ταυτόχρονα και θα καταλήγουμε σε κάτι που ισχύει (π.χ 1=1 ή α=α) με τη χρήση ισοδυναμιών.

$$(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\alpha^2\right)^2-2\left(\alpha^2\right)\left(\beta^2\right)+\left(\beta^2\right)^2+2^2\alpha^2\beta^2=\left(\alpha^2\right)^2+2\left(\alpha^2\right)\left(\beta^2\right)+\left(\beta^2\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4+4\alpha^2\beta^2=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4$$

3ος Τρόπος

Με τη χρήση της μεθόδου «**Απαγωγή σε Άτοπο**» ή «**Εις άτοπο απαγωγής**».Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, υποθέτουμε ότι αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε δεν ισχύει και χρησιμοποιώντας σωστούς συλλογισμούς (πράξεις, ιδιότητες, κ.λ.π…) καταλήγουμε σε ένα συμπέρασμα το οποίο έρχεται σε αντίθεση με κάτι που ισχύει στην υπόθεσή μας (δηλαδή καταλήγουμε σε άτοπο).

Εφαρμογή: Αν α ακέραιος και ο α^2 άρτιος (δηλαδή γράφεται στη μορφή 2κ), να αποδείξετε ότι ο α είναι άρτιος.

Λύση

Έστω ότι ο α είναι περιττός, δηλαδή είναι της μορφής α = 2κ+1.
Υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη της εξίσωσης θα έχουμε:

$$\alpha^2=(2\kappa+1)^2=(2\kappa)^2+2(2\kappa)1+1^2=4\kappa^2+4\kappa+1=2(\underbrace{2\kappa^2+2\kappa}_{\lambda})+1=2\lambda+1$$

Αυτό σημαίνει ότι ο α^2 είναι περιττός, κάτι που αντιτίθεται στην υπόθεση της άσκησης, αφού η εκφώνηση της άσκησης μας πληροφορεί ότι ο α^2 άρτιος.
Έτσι λοιπόν καταλήξαμε σε Άτοπο και άρα η υπόθεσή μας ότι ο α περιττός είναι λανθασμένη οπότε ο α άρτιος!!!

Ερωτήσεις Συμπλήρωσης Κενού

1. Να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες :

$\alpha\beta=0 \Leftrightarrow$ …………………………

$\alpha\beta\neq 0 \Leftrightarrow$ ……………………………………

2. Να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες :

$(x-1)(y+2)=0 \Leftrightarrow$ …………………………

$(x+3)(y-5)\neq 0 \Leftrightarrow$ …………………………

Ερωτήσεις Αντιστοίχησης

Αντιστοιχίστε τα στοιχεία της στήλης (Α) με τα στοιχεία της στήλης (Β).

ΣΤΗΛΗ (Α)	ΣΤΗΛΗ (Β)
1. $x(x-1)=0$	**Α.** $x=-1$
2. $x(x-1)\neq 0$	**Β.** $x=2$
3. $x^2+y^2=0$	**Γ.** $x=0$ ή $x=1$
4. $x^2+y^2\neq 0$	**Δ.** $x\neq 0$ ή $y\neq 0$
5. $x(x-2)=0$ και $x(x-1)\neq 0$	**Ε.** $x\neq 0$ και $x\neq 1$
6. $x^2=1$ και $x<0$	**Ζ.** $x=0$ και $y=0$

Ερωτήσεις «Σωστού – Λάθους»

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ).

1. Αν $\chi^2=0$, τότε $\chi=0$	**Σ**	**Λ**
2. $\chi^2>0$	**Σ**	**Λ**
3. Αν $x \neq 0$ τότε $\chi^2>0$	**Σ**	**Λ**
4. $x=2 \Rightarrow x^2=4$	**Σ**	**Λ**
5. $x^2=4 \Rightarrow x=2$	**Σ**	**Λ**
6. $x^2=1 \Leftrightarrow x=1$	**Σ**	**Λ**
7. $x>1 \Rightarrow x^2>1$	**Σ**	**Λ**
8. $x<1 \Rightarrow x^2<1$	**Σ**	**Λ**
9. $x^2>1 \Rightarrow x>1$	**Σ**	**Λ**
10. $x^2<1 \Rightarrow x<1$	**Σ**	**Λ**

Άλυτες Ασκήσεις

1. Στις παρακάτω προτάσεις να γράψετε την άρνηση τους.

- i. α=β
- ii. x<y
- iii. $\alpha \leq \beta$
- iv. α=0 και $\beta \neq 0$
- v. α<2 και $\beta \geq 3$
- vi. χ=2 ή χ>>3
- vii. α=1 ή α=2
- viii. οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι
- ix. Για κάθε πραγματικό αριθμό χ, ισχύει $x^2 \geq 0$

2. Να συμπληρωθούν οι ισοδυναμίες:

i. $\begin{cases} \alpha=2 \ \ \eta \ \ \alpha=3 \\ \alpha \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow ....$

ii) $\begin{cases} \alpha=1 \ \ \eta \ \ \alpha=5 \\ \alpha=5 \end{cases} \Leftrightarrow ....$

ii. $\begin{cases} \alpha=1 \ \ \eta \ \ \alpha=2 \\ \beta=3 \end{cases} \Leftrightarrow ....$

3. Στις παρακάτω προτάσεις να γράψετε την αντιθετοαντίστροφή τους.

- i. Αν α=0, τότε $\beta \neq 3$
- ii. Αν $y_1 \neq y_2$, τότε $x_1 \neq x_2$
- iii. Αν χ<2, τότε $y \geq 3$
- iv. Αν α=0 και $\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει λύση
- v. $\alpha=\beta \Leftrightarrow \gamma \neq \delta$

Β. ΣΥΝΟΛΑ

Η έννοια του συνόλου

Ουσιαστικά, ορισμός για το σύνολο δεν υπάρχει, αφού αυτή η έννοια είναι πρωταρχική και θεμελιώδης στην ανθρώπινη σκέψη.

Προσπαθώντας να οριοθετήσουμε λίγο την έννοια του συνόλου, θα μπορούσαμε απλά να πούμε ότι είναι μια συλλογή αντικειμένων με δύο βασικές ιδιότητες:

1. Τα αντικείμενα (που ονομάζονται **στοιχεία** του συνόλου) να έχουν κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες, ώστε να μπορούμε να πούμε ότι ανήκουν στο συγκεκριμένο σύνολο Α.
   Συμβολίζουμε: $x \in A$.

2. Να είναι **διακεκριμένα**.
   (Δηλαδή να είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Ποτέ δεν επαναλαμβάνεται το ίδιο στοιχείο δύο φορές μέσα στο ίδιο σύνολο).

✓ Εάν ένα στοιχείο x **ανήκει** σε ένα σύνολο Α γράφουμε ότι $x \in A$

✓ Εάν ένα στοιχείο x **δεν ανήκει** σε ένα σύνολο Α γράφουμε ότι $x \notin A$

✓ Ένα σύνολο μπορεί να παρασταθεί με τους ακόλουθους τρόπους:

i) *Με αναγραφή των στοιχείων τους:* $A = \{1, 5, 0\}$

ii) *Με περιγραφή των στοιχείων του:*
$A = \{x \in R /\ \text{με } x > 0\}$ ***ή*** $A = \{x \in Z / x\ \text{αρτιος}\}$

Παραδείγματα: Μερικά γνωστά σύνολα είναι:

i) Το σύνολο των φυσικών αριθμών $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

ii) Το σύνολο των ακεραίων αριθμών $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

iii) Το σύνολο των ρητών αριθμών
$$Q = \left\{1, 5, -\frac{3}{4}, -1, \frac{2}{3}, ...\right\} = \left\{\frac{\alpha}{\beta} / \alpha, \beta \text{ ακεραιοι με } \beta \neq 0\right\}$$

iv) Το σύνολο των αρρήτων αριθμών $R - Q = \left\{\sqrt{2}, \pi, ...\right\}$

v) Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $R = \left\{-1, 56, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, \pi, ...\right\}$

✓ Δύο σύνολα Α, Β είναι **ίσα** όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία και γράφουμε Α = Β.

Παραδείγματα:

i) $A=\{1,2\}$ και $B=\{x\in R/(x-1)(x-2)=0\}\Rightarrow A=B$

ii) $A=\{-3\}$ και $B=\{x\in R/x^2+6x+9=0\}\Rightarrow A=B$

✓ Ένα σύνολο Α λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Β (ή Β **υπερσύνολο** του Α) όταν κάθε στοιχείο του Α είναι στοιχείο του Β. Τότε συμβολίζουμε : $A\subseteq B$

Παραδείγματα:

i) $A=\{1,2,3,.....,14\}$ και $B=\{1,2,3,......,100\}\Rightarrow A\subseteq B$

ii) $N\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R$

✓ Άμεσες συνέπειες του ορισμού του ***υποσυνόλου*** είναι οι εξής :

1. $A\subseteq A$ για κάθε σύνολο Α

2. Αν $A\subseteq B$ και $B\subseteq \Gamma$, τότε $A\subseteq \Gamma$

3. Αν $A\subseteq B$ και $B\subseteq A$, τότε Α = Β

4. $\varnothing\subseteq A$

✓ Αν $A\subseteq B$ και $A\neq B$, τότε το Α λέγεται **γνήσιο υποσύνολο** του Β και συμβολίζουμε με $A\subset B$.

✓ Το σύνολο που δεν έχει καθόλου στοιχεία λέγεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με $\varnothing$ ή $\{\ \}$.

Παραδείγματα:

i) $A=\{x\in R/x-2>0 \text{ και } x-1<0\}$

ii) $A=\{x\in R/x^2=-1\}$

✓ Το σύνολο που έχει ένα μόνο στοιχείο καλείται **μονοσύνολο**.(π.χ $A=\{\alpha\}$)

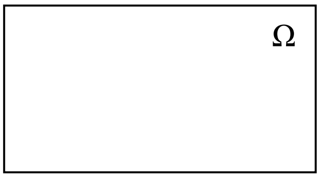
✓ **Ισοπληθικά** καλούνται δύο ή περισσότερα σύνολα που έχουν ακριβώς το ίδιο πλήθος στοιχείων. Π.χ: Τα σύνολα $A=\{0,1,2\},B=\{2,-1,7\}$ και $\Gamma=\{-1,0,1\}$ είναι ισοπληθικά

Διαγράμματα Venn

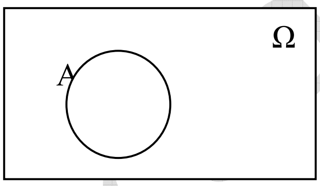
Τα διαγράμματα Venn αποτελούν μια εναλλακτική παρουσίαση των συνόλων.

Καλούμε **δειγματικό χώρο Ω** το σύνολο εκείνο από το οποίο αντλούν τα στοιχεία τους τα διάφορα σύνολα Α, Β, …(Με άλλα λόγια είναι η αποθήκη μέσα από την οποία αντλούμε τα διάφορα στοιχεία…) π.χ Με Ω μπορούν να χαρακτηριστούν τα σύνολα $\mathrm{R}, \mathrm{Z}, \mathrm{Q}, \mathrm{N}$

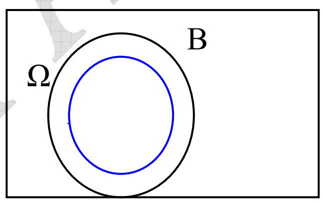
Στα διαγράμματα Venn ο δειγματικός χώρος απεικονίζεται ως :



Στα διαγράμματα Venn ένα σύνολο Α απεικονίζεται ως :



Στα διαγράμματα Venn ένα σύνολο $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ απεικονίζεται ως :



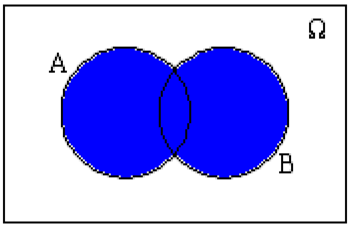
Πράξεις στα σύνολα

Α. Ένωση δύο συνόλων Α και Β λέγεται το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα δύο σύνολα Α, Β και συμβολίζεται με $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

Δηλαδή: $\boxed{\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x \in \Omega / x \in \mathrm{A} \ \eta \ x \in \mathrm{B}\}}$

Πρακτικά, το $A \cup B$ είναι το σύνολο που περιέχει **όλα** τα στοιχεία των δύο συνόλων.

Στα διαγράμματα Venn ένα σύνολο $A \cup B$ απεικονίζεται ως:



Άμεσες συνέπειες του ορισμού της ***ένωσης*** είναι οι εξής :

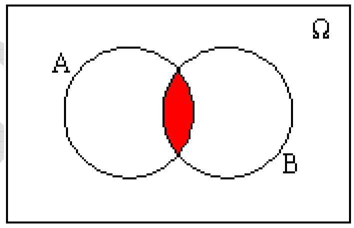
1. $A \cup \varnothing = A$ για κάθε σύνολο Α
2. $A \cup A = A$ για κάθε σύνολο Α
3. $A \cup B = B \cup A$ για κάθε Α, Β(αντιμεταθετική ιδιότητα)
4. $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ για κάθε Α, Β, Γ (προσεταιριστική ιδιότητα)

Β. Τομή δύο συνόλων Α και Β λέγεται το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν συγχρόνως στο Α και στο Β και συμβολίζεται με $A \cap B$.

Δηλαδή: $\boxed{A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \ \text{ και } \ x \in B\}}$

Πρακτικά, το $A \cap B$ είναι το σύνολο που περιέχει **όλα τα κοινά – και μόνα αυτά** – στοιχεία των δύο συνόλων.

Στα διαγράμματα Venn ένα σύνολο $A \cap B$ απεικονίζεται ως:



Άμεσες συνέπειες του ορισμού της ***τομής*** είναι οι εξής :

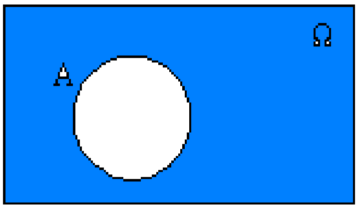
1. $A \cap \varnothing = \varnothing$ για κάθε σύνολο Α
2. $A \cap A = A$ για κάθε σύνολο Α
3. $A \cap B = B \cap A$ για κάθε Α, Β(αντιμεταθετική ιδιότητα)
4. $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$ για κάθε Α, Β, Γ (προσεταιριστική ιδιότητα)

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν $A \cap B = \varnothing$, τότε τα σύνολα Α, Β λέγονται **Ξένα μεταξύ τους**.

Γ. Συμπλήρωμα ενός συνόλου Α είναι το σύνολο που περιέχει εκείνα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α και συμβολίζεται με A'.

Δηλαδή: $\boxed{A' = \{x \in \Omega / x \notin A\}}$

Στα διαγράμματα Venn ένα σύνολο A' απεικονίζεται ως:



Άμεσες συνέπειες του ορισμού του ***συμπληρώματος*** είναι οι εξής :

1. $\Omega' = \varnothing$ και $\varnothing' = \Omega$

2. $A \cap A' = \varnothing$

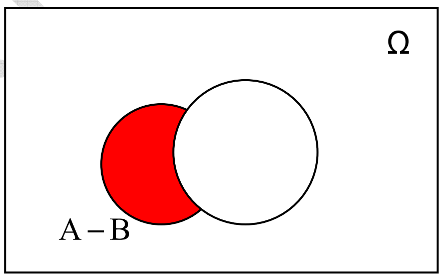
3. $A \cup A' = \Omega$

4. $(A')' = A$

Δ. Ορίζουμε ως **διαφορά** των Α, Β το σύνολο $A - B = \{\chi \in A \text{ και } \chi \notin B\} = A \cap B'$.

Το $A - B = A \cap B'$ μας δείχνει **ποια στοιχεία του Α δεν ανήκουν στο Β**.

Όμοια ορίζεται το σύνολο $B - A = B \cap A'$, το οποίο μας δείχνει ποια στοιχεία του Β δεν ανήκουν στο Α.



Ιδιότητες των πράξεων μεταξύ των συνόλων

Σε όλα τα επόμενα, θεωρούμε Ω το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και Α, Β ενδεχόμενα του Ω.

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

2. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

3. $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$, $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$.

4. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$, $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

5. $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$.

6. $A \cup \varnothing = A$, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap \Omega = A$.

7. $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$ και $B = \varnothing$.

8. $A \subseteq B$ και $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow A \cup \Gamma \subseteq B \cup \Delta$.

9. Αν $A \cap B = \varnothing$, (δηλαδή δεν υπάρχουν κοινά στοιχεία μεταξύ των Α, Β), τότε τα ενδεχόμενα Α, Β ονομάζονται **ξένα** μεταξύ τους ή **ασυμβίβαστα** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**.

10. Αν $A \subseteq B$ και $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow A \cap \Gamma \subseteq B \cap \Delta$.

11. $\Omega' = \varnothing$, $\varnothing' = \Omega$.

12. $A \cap A' = \varnothing$, $A \cup A' = \Omega$.

13. $(A')' = A$ (Δηλαδή **διπλή άρνηση σημαίνει κατάφαση** !!!).

14. $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$, $A = B \Leftrightarrow A' = B'$.

15. Νόμος του De Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

16. $A - B \subseteq A$, $B - A \subseteq B$, $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$.

17. $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

18. $A' - B' = B - A$, $B' - A' = A - B$.

19. $A - \varnothing = \varnothing - A = \varnothing$, $A - \Omega = \varnothing$, $\Omega - A = A'$.

20. $A - B' = A \cap B$, $B' - A = (A \cup B)'$.

Ερωτήσεις «Σωστού – Λάθους»

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ).

1. Τα σύνολα των γραμμάτων των λέξεων Νίκος και νίκος είναι ίσα. **Σ Λ**
2. Αν Α, Β δύο σύνολα, τότε $A \cup B \supseteq A$ **Σ Λ**
3. Αν Α, Β$\neq \varnothing$ και $A \subseteq B$, τότε ισχύει $A \cup B = B$ **Σ Λ**
4. Αν Α, Β$\neq \varnothing$ και $A \subseteq B$, τότε ισχύει $A \cap B = A$ **Σ Λ**
5. Ισχύει $\{\alpha\} \in \{\{\alpha\},\beta\}$ **Σ Λ**

Ερωτήσεις «Πολλαπλής Επιλογής»

Σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί:
   Α. $0 \in \varnothing$ **Β.** $\varnothing \subseteq \varnothing$ **Γ.** $0 \in \{0\}$ **Δ.** $\varnothing = \{0\}$

2. Δίνονται τα σύνολα $A = \{2,3,4\}$, $B = \{3,4,1\}$, $\Gamma = \{1,2,3,4\}$ και $\Delta = \{2,3\}$. Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί:
   Α. $\Delta \subseteq A$ **Β.** $B \subseteq \Gamma$ **Γ.** $A \subseteq B$ **Δ.** $A \subseteq \Gamma$

3. Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι λανθασμένοι:
   Α. $0 \in \varnothing$ **Β.** $0 \in \{0\}$ **Γ.** $\varnothing = \{0\}$ **Δ.** $\varnothing \subseteq \varnothing$ **Ε.** $\{\alpha\} \in \{\alpha,\beta\}$
   Ζ. $\{\alpha\} \subseteq \{\alpha,\beta\}$

Προσοχή !!!

Έχουν μεγάλη σημασία οι λέξεις που χρησιμοποιούμε για τη περιγραφή των πράξεων μεταξύ συνόλων - ενδεχομένων.

1. $A \cup B$: «Είτε το Α, είτε το Β, είτε και τα δύο» ή «τουλάχιστον ένα από τα Α, Β».
2. $A \cap B$: «Και το Α και το Β» (ταυτόχρονα).
3. Α': «Δεν συμβαίνει το Α»
4. $A - B = A \cap B'$: «Μόνο το Α» ή «ακριβώς το Α» ή «το Α και όχι το Β.
5. $B - A = B \cap A'$: «Μόνο το Β» ή «ακριβώς το Β» ή «το Β και όχι το Α).
6. $(A-B) \cup (B-A)$ η $(A \cap B') \cup (B \cap A')$: « Τουλάχιστον ένα από τα Α-Β, Β-Α».

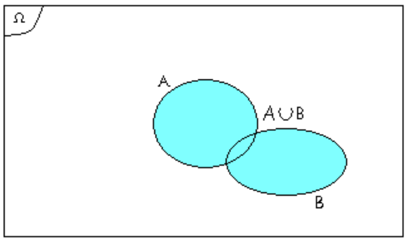
Το διάγραμμα του Venn ως μέθοδο απόδειξης σχέσεων

Το διάγραμμα αυτό αποτελεί μια **απλή γραφική μέθοδο απόδειξης** προτάσεων που διατυπώνονται στη θεωρία συνόλων.

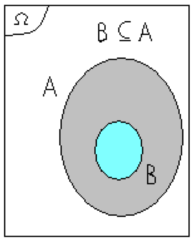
Σε εξωτερικό πλαίσιο έχω το Ω και τα επί μέρους σύνολα παριστάνονται εντός του πλαισίου με άλλα μικρότερα σύμφωνα με τις ιδιότητές τους.

Το κενό σύνολο δεν χρειάζεται να έχει γραφική απεικόνιση .

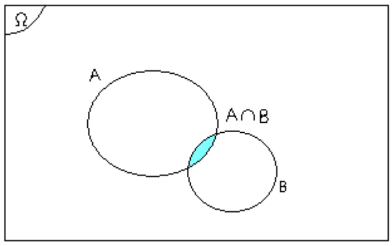
Συνήθως με τις κατάλληλες γραμμοσκιάσεις επιτυγχάνω να δείξω την ισότητα που επιθυμώ.



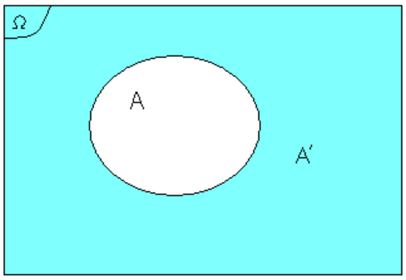
σχ.1



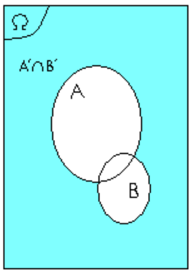
σχ.5



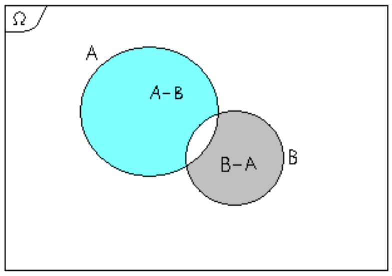
σχ.2



σχ.3



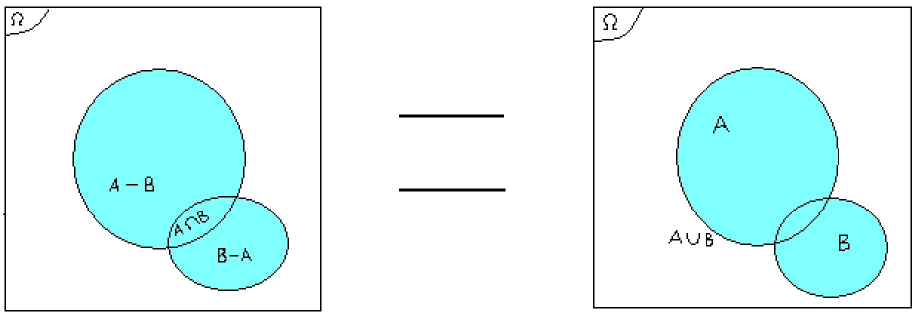
σχ.6



σχ.4

Προσοχή !!!
Αν θέλω να αποδείξω μια ισότητα μεταξύ ενδεχομένων, κατασκευάζω δύο διαγράμματα (ένα για κάθε μέλος) και αν καταλήξω στο ίδιο χωρίο τότε την απέδειξα .

Παράδειγμα: Δείξτε ότι $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$



Λυμένες Ασκήσεις

1. Γράψτε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο $A=\{\chi \in R:\ \chi^2-\chi=0\}$.

Λύση

Λύνουμε την εξίσωση $\chi^2-\chi=0 \Rightarrow \chi(\chi-1)=0 \Rightarrow \chi=0$, $\chi=1$.
Άρα είναι $A=\{0,1\}$

2. Δείξτε ότι τα σύνολα $A=\{-1,1\}$ $B=\{\chi \in R: \chi^2=1\}$ είναι ίσα.

Λύση

Βρίσκουμε με αναγραφή στοιχείων το Β (δηλαδή λύνουμε την εξίσωση) και έχουμε $\chi^2=1 \Rightarrow \chi^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow \chi=\pm 1 \Rightarrow B=\{-1,1\}=A$.

3. Θεωρούμε το σύνολο Ω=$\{1,2,3,...,10\}$ και έστω Α=$\{1,2,3,4\}$, Β=$\{4,5,6\}$, Γ=$\{5,6,9,10\}$ τρία υποσύνολα του Ω.
Να βρείτε τα σύνολα:
a) $A \cup B$.
b) $A \cap B$.
c) $A' \cap B', (A \cup B)'$. Τι παρατηρείτε;
d) $A' \cup B', (A \cap B)'$. Τι παρατηρείτε;
e) $A \cap B \cap \Gamma$.

Λύση

α) Είναι $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$.

β) $A \cap B=\{4\}$.

c) Είναι $A'=\{5,6,7,8,9,10\}$ και $B'=\{1,2,3,7,8,9,10\}$ οπότε $A' \cap B'=\{7,8,9,10\}$.
Από πριν έχουμε $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$, άρα $(A \cup B)'=\{7,8,9,10\}$.
Παρατηρούμε ότι $A' \cap B'=(A \cup B)'$ (**νόμος του De Morgan**).

d) Είναι $A'=\{5,6,7,8,9,10\}$ και $B'=\{1,2,3,7,8,9,10\}$ οπότε $A'\cup B'=\{1,2,3,5,6,7,8,9,10\}$.
Από πριν έχουμε $A\cap B=\{4\}$, άρα $(A\cap B)'=\{1,2,3,5,6,7,8,9,10\}$.
Παρατηρούμε ότι $A'\cup B'=(A\cap B)'$ κάτι που, από τον νόμο του De Morgan, ήταν αναμενόμενο.

e) $A\cap B\cap \Gamma=\{\ \}=\varnothing$.

4. Έστω Ω το σύνολο των φοιτητών σε σχολές τετραετούς φοίτησης του πανεπιστημίου Αθηνών και A_1, A_2, A_3, A_4 τα σύνολα των φοιτητών του $1^{ου}$, $2^{ου}$, $3^{ου}$ και $4^{ου}$ έτους αντίστοιχα. Θεωρούμε ακόμα Β το σύνολο των φοιτητριών και Κ το σύνολο των μη Αθηναίων φοιτητών. Περιγράψτε τι σημαίνουν τα πιο κάτω σύνολα:

a) $(A_1\cup A_2)'\cap B$.
b) $B\cap K'$.
c) $A_1\cap B'\cap K$.
d) $A_3\cap B\cap K'$.
e) $(A_1\cup A_2)\cap K\cap B$.

Λύση

α) Το $(A_1\cup A_2)'\cap B$ είναι το σύνολο των φοιτητριών που φοιτούν στο $3^{ο}$ ή στο $4^{ο}$ έτος.

β) Το $B\cap K'$ είναι το σύνολο των Αθηναίων φοιτητριών (όλων των ετών).

c) Το $A_1\cap B'\cap K$ είναι το σύνολο των πρωτοετών ανδρών φοιτητών, οι οποίοι δεν είναι Αθηναίοι.

d) Το $A_3\cap B\cap K'$ είναι το σύνολο των τριτοετών Αθηναίων φοιτητριών.

e) Το $(A_1\cup A_2)\cap K\cap B$ είναι το σύνολο των φοιτητριών $1^{ου}$ ή $2^{ου}$ έτους, οι οποίες δεν είναι Αθηναίες.

Άλυτες Ασκήσεις

1. Έστω $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ και τα υποσύνολά του $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $\Gamma=\{5,8,9,10\}$ και $\Delta=\varnothing$. Να βρεθούν τα σύνολα:

i) $A\cup B=\{......................................\}$

ii) $A\cap B=\{......................................\}$

iii) $\Gamma\cup\Delta=\{......................................\}$

iv) $\Gamma\cap\Delta=\{......................................\}$

v) $A'=\{......................................\}$

vi) $B'=\{......................................\}$

vii) $\Gamma'=\{......................................\}$

viii) $\Delta'=\{......................................\}$

ix) $(B\cap\Gamma)'=\{......................................\}$

x) $(B\cup\Gamma)'=\{......................................\}$

xi) $(A\cap B)\cap\Gamma=\{......................................\}$

xii) $(A\cup B)\cup\Gamma=\{......................................\}$

xiii) $(A\cap\Delta)\cap\Gamma=\{......................................\}$

xiv) $(B\cup\Gamma)\cup\Delta=\{......................................\}$

xv) $(B\cap\Delta)\cup\Gamma=\{......................................\}$

2. Να γραφούν με αναγραφή τα παρακάτω σύνολα:

i) $A=\{\kappa\in Z/-2\le\kappa<2\}=\{......................................\}$

ii) $B=\{\kappa\in Z/|\kappa|\le 1\}=\{......................................\}$

iii) $\Gamma=\{x\in N/x^2=1\}=\{......................................\}$

iv) $\Delta=\{(x,y)/x,y\in N \text{ και } x+y=2\}=\{......................................\}$

v) $E=\{(x,y)/x,y\in R \text{ και } x^2+y^2=0\}=\{......................................\}$

3. Ποιο από τα παρακάτω σύνολα ΔΕΝ είναι το κενό (κυκλώστε τη σωστή απάντηση):

i) $A=\{x\in Z/1<x<2\}$

ii) $B=\{\kappa\in N/2\kappa=-3\}$

iii) $\Gamma=\{x\in R/x^2+1=0\}$

iv) $\Delta=\{x\in R/x^2-5x+6=0 \text{ και } x>6\}$

v) $E=\{x\in R/x^2-3x+2=0 \text{ και } x<2\}$

4. Αν $\Omega = R$, να βρείτε το συμπληρωματικό του $A = \{x \in R / |x-1| \geq 2\}$

5. Σε ποίες από τις παρακάτω περιπτώσεις έχουμε ίσα σύνολα:
i) $A = \{-6, 8, 0, 2\}$ και $B = \{0, 8, -6, 2, 1\}$
ii) $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ και $B = \{\beta, \gamma, \alpha\}$
iii) $A = \{-3, -2, -1, 0\}$ και $B = \{x \in Z / -3 \leq x < 1\}$
iv) $A = \{0\}$ και $B = \{x \in R / x + 2 = 2\}$
v) $A = \varnothing$ και $B = \{x \in R / x^2 + 1 = 0\}$

6. Αν $A = (0, 3]$ και $B = [3, 5)$ να βρείτε τα σύνολα $A \cap B, A \cup B, A \cap B', A \cup B'$.

7. Δίνεται το σύνολο $A = \{2, 3, 4, 6\}$. Να δικαιολογήσετε γιατί η εξίσωση $2x + 2 = 12$ είναι αδύνατη στο σύνολο Α. Έπειτα να λύσετε στο σύνολο των ακεραίων τη εξίσωση $2x - 4 = -9$

8. Δίνονται τα σύνολα $A = \{x \in R / x > 2\}$ και $B = \{x \in R / x > 4\}$. Να παραστήσετε με περιγραφή των στοιχείων τα σύνολα: $A \cap B$ και $A \cup B$. Στη συνέχεια να τα γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

9. Αν $A = \{0, 2, 4\}$, να βρείτε όλα τα σύνολα Β για τα οποία ισχύει: $\{0\} \subseteq B$, $B \subseteq A$ και $B \neq A$

10. Έστω Ω το σύνολο των μαθητών του φροντιστηρίου «ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ», Α το σύνολο των μαθητών της 3ης λυκείου και Β το σύνολο των μαθητών που έχουν επιλέξει (ή πρόκειται να επιλέξουν) τη θετική κατεύθυνση. Περιγράψτε τι παριστάνουν τα σύνολα:
a) $A \cup B$.
b) $A \cap B$.
c) A'.
d) B'.
e) $A - B$.
f) $A \cap B'$.
g) $B - A$.
h) $B \cap A'$.

11. Αν $A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$, $B=\{\gamma,\delta\}$, $\Gamma=\{\alpha,\varepsilon,\beta\}$, γράψτε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap \Gamma$, A', $A' \cap \Gamma'$.

12. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και Α, Β δύο ενδεχόμενα του πειράματος. Χρησιμοποιώντας όλες τις ενδεδειγμένες πράξεις μεταξύ των συνόλων Ω, Α, Β, εκφράστε (συμβολίστε) τα επόμενα ενδεχόμενα:

a) Συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα Α, Β.
b) Συμβαίνει το πολύ ένα από τα Α, Β.
c) Δεν συμβαίνει κανένα από τα Α, Β.
d) Συμβαίνουν και το Α και το Β (ταυτόχρονα).
e) Συμβαίνει μόνο (ακριβώς) το Α, ή μόνο (ακριβώς) το Β.
f) Συμβαίνει το Α, αλλά (και) δεν συμβαίνει το Β.
g) Συμβαίνει το Β, αλλά όχι το Α.

13. Δημιουργήστε τα διαγράμματα για τις ιδιότητες της ένωσης, της τομής, του συμπληρώματος και της διαφοράς.

14. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι και θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α: φέραμε άρτια ένδειξη, Β: φέραμε περιττή ένδειξη, Κ: φέραμε ένδειξη που είναι πρώτος αριθμός. Βρείτε τα ενδεχόμενα:
h) Α’, Β’, Κ’.
a) $A\cap B$, $A\cup B$, $A\cup K$, $A\cap K$, $B\cap K$, $B\cup K$.
b) Α-Β, Β-Α.
c) $B\cap A'$, $A\cap B'$.
d) $A'\cap B'$, $(A\cup B)'$.
e) $A'\cup B'$, $(A\cap B)'$.

15. Εξετάστε αν ισχύουν οι σχέσεις:
a) $A\cup B = A\cup \Gamma \Rightarrow B=\Gamma$.
b) $A\cap B = A\cap \Gamma \Rightarrow B=\Gamma$.

16. Αποδείξτε ότι ισχύουν τα επόμενα:
a) $A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A$.
b) $A\cup B=A\cap B \Leftrightarrow A=B$.
c) $A\cap B=A\cap \Gamma \Leftrightarrow A\cap B'=A\cap \Gamma'$.
d) $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B'=\varnothing$.
e) $A\subseteq B \Leftrightarrow A'\cup B=\Omega$.
f) $A\cap B'=A'\cap B \Leftrightarrow A=B$.

17. Να προσδιορισθούν τα σύνολα Χ , Υ, Φ αν ισχύουν οι σχέσεις:
$X\cap Y=\{\beta,\delta\}$, $X\cup Y=\{\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$, $X\cap \Phi=\{\beta,\gamma\}$, $X\cup \Phi=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$.

18. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και Α, Β, Γ τρία ενδεχόμενα του πειράματος. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς;
a) Τα Α, Α’ είναι ξένα.
b) Αν $A\subseteq B$, τότε $B'\subseteq A'$.
c) Αν $A\cap B=\varnothing$, τότε $A\subseteq B'$.
d) Αν $A\subseteq B$ και τα Β, Γ είναι ασυμβίβαστα, τότε τα Α, Γ είναι ξένα.
e) Αν $A\cap B=\varnothing$ και $A\cap \Gamma=\varnothing$, τότε $B\cap \Gamma=\varnothing$.
f) Αν $A\subseteq B$, τότε $A\cup B'=\Omega$.
g) (Α’)’=Α.

19. Αν $A=\{\chi \in R: \chi^2-4=0\}$ $B=\{\chi \in R: \chi^2=2\chi\}$ $\Gamma=\{\chi \in R: \chi^3+\chi^2-2\chi=0\}$, δείξτε ότι ισχύει: $A\cup(B\cap\Gamma)=(A\cap B)\cup(B\cap\Gamma)$.

20. Σε μια πόλη εκδίδονται και κυκλοφορούν 3 τοπικές εφημερίδες α, β, κ και έστω Α, Β, Κ τα σύνολα των πολιτών οι οποίοι διαβάζουν κατ` αντιστοιχία τις 3 εφημερίδες. Να περιγράψετε τι παριστάνουν τα σύνολα:

a) $A\cup B\cup K$.
b) $A\cap B\cap K$.
c) $(A\cup B)'$.
d) $A'\cup B'$.
e) $A'\cup B'\cup K'$.
f) $A'\cap B'\cap K'$

21. Αποδείξτε, με χρήση των διαγραμμάτων Venn, τους τύπους του De Morgan.

22. Διαβάζοντας οριζόντια (κατά γραμμή) να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα. Το Ν σημαίνει ότι το ενδεχόμενο πραγματοποιείται, ενώ το Ο σημαίνει ότι το ενδεχόμενο δεν πραγματοποιείται.

Α	Β	Α’	Β’	$A\cup B$	$A\cap B$	$(A\cup B)'$	$(A\cap B)'$	$A'\cap B'$	$A'\cup B'$
Ν	Ν								
Ν	Ο								
Ο	Ν								
Ο	Ο								

23. Έστω Ω το σύνολο των πολιτών της Ευρωπαϊκής Ένωσης, Α το σύνολο των Ελλήνων και Β το σύνολο των Ισπανών πολιτών. Περιγράψτε τι σημαίνουν τα σύνολα:

a) $A\cup B$.
b) $A\cap B$.
c) A'.
d) B'.
e) $A-B$.
f) $A\cap B'$.
g) $B-A$.
h) $B\cap A'$.